

文章编号: 1000-5889(2005)05-0150-04

# 广义电磁热弹二维问题的正则模态法

何天虎<sup>1</sup>, 田晓耕<sup>2</sup>, 沈亚鹏<sup>2</sup>

(1. 兰州理工大学 理学院, 甘肃 兰州 730050; 2. 西安交通大学 建筑工程与力学学院, 陕西 西安 710049)

**摘要:** 应用带有两个热松弛时间的 G-L 广义热弹性理论, 研究一理想导体的半无限大电磁介质的电磁热弹耦合的二维问题. 给出介质中的 Maxwell 方程组, 建立了电磁热弹耦合的控制方程, 通过正则模态法得到温度、位移、应力等物理量的解, 并用图形反映了各物理量的分布, 由此可以看出, 热在介质中是以有限速度传播.

**关键词:** 热松弛时间; 广义热弹性理论; 正则模态法; 电磁热弹耦合; 热波

**中图分类号:** O 343.6 **文献标识码:** A

## Normal mode analysis to two dimensional generalized electro magneto ther moelastic problem

HE Tian hu<sup>1</sup>, TI AN Xiao geng<sup>2</sup>, SHEN Ya peng<sup>2</sup>

(1. School of Science, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou 730050, China; 2. School of Architectural Engineering and Mechanics, Xi'an Jiao-tong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** A two dimensional coupled problem in electro magneto ther moelasticity for a perfectly conducting half space whose surface is subjected to a thermal shock is studied. The problem is in the context of the Green and Lindsay's generalized ther moelasticity theory with two relaxation times. The Maxwell equations are formulated and the electro magneto ther moelastic coupled governing equations are established. The normal mode analysis is used to obtain the exact expressions for the considered variables. The distribution of the considered variables are represented graphically. From the distributions the wave type heat propagation can be found in the medium. This indicates that the generalized heat conduction mechanism is completely different from the classic Fourier's in essence. In generalized ther moelasticity theory the heat propagates as a wave with finite velocity instead of infinite velocity in media.

**Key words:** thermal relaxation times; generalized ther moelasticity theory; normal mode analysis; electro magneto ther moelastic couple; thermal wave

在经典线性热弹性理论中, 无论耦合或非耦合热弹性理论, 其热传导方程都是扩散型的, 这意味着在热冲击下热在介质中的传播速度无限大, 而这与实验观测不相符. 学者们发展了 2 种广义热弹性理论来弥补经典线性热弹性理论的不足, 一是 LORD 等的<sup>[1]</sup>广义热弹性理论(L-S); 二是 GREEN 等的<sup>[2]</sup>广义热弹性理论(G-L). 这 2 种理论都保证了热在介质中以有限的速度进行传播. 热弹性体在磁场作用下, 磁场与应力应变之间相互作用的研究关系到诸多领域, 尤其是在核工业领域, 研究核反应堆内急剧高温及其温度梯度以及所施加的磁场之间的关

系, 对核反应堆装置的设计及运行具有重要的意义.

基于 L-S 理论, SHARMA 和 CHANDRASEKHARAI AH 等<sup>[3,4]</sup>采用势函数法及状态空间法研究了一维瞬态的磁热弹, SHERIEF 和 EZZAT<sup>[5]</sup>采用拉普拉斯变换研究了无限长环形圆柱的磁热弹耦合广义热冲击, SHERIEF 和 HELMY<sup>[6]</sup>通过拉普拉斯及傅立叶变换研究了电和热可导的半无限大电磁介质的电磁热弹耦合的二维热冲击; 基于 G-L 理论, CHOUDHURI 等<sup>[7]</sup>研究了热冲击作用下电和热可导的弹性半空间中磁热弹性波传播的一维问题, EZZAT 等<sup>[8]</sup>采用状态空间法研究了一厚度有限的无限大理想导体电磁热弹耦合的二维问题.

本文应用 G-L 理论, 采用正则模态法, 研究了一半无限大理想导体的电磁热弹性耦合的二维热冲

收稿日期: 2004-06-03

基金项目: 国家自然科学基金(10472039, 10472089)

作者简介: 何天虎(1973-), 男, 甘肃靖远人, 博士, 副教授.

击.

### 1 基本方程

在各向同性、线性和均匀的介质中,Maxwell 方程组的形式为

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{h} &= \mathbf{J} + \epsilon_0 \mathbf{E}, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \dot{\mathbf{h}} \\ \mathbf{E} &= -\mu_0 (\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{H}), & \nabla \cdot \mathbf{h} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{h}$  是磁感应强度;  $\mathbf{J}$  是电流密度;  $\mathbf{E}$  是电场强度;  $\mathbf{u}$  是位移;  $\mathbf{H}$  是外部所施加的磁场强度;  $\mu_0$ 、 $\epsilon_0$  分别是磁导率和介电率;  $\nabla$  是 Hamilton 算子.

不计体力及内热源,考虑洛伦兹力, G-L 型的广义电磁热弹性理论的控制方程为

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \delta_{kk} - \gamma(T - T_0 + \tau_1 T) \delta_{ij} \quad (2)$$

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3)$$

$$\kappa \nabla^2 T = \rho c_E (T + \tau_2 T) + \gamma T_0 u_{i,i}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4)$$

$$F_i = \mu_0 (\mathbf{J} \times \mathbf{H})_i \quad (5)$$

式中:各物理量上方的点表示对时间微分,下方的撇表示对坐标微分; $i, j = 1, 2$ ;  $\sigma_{ij}$  为应力分量;  $e_{ij}$  为应变分量;  $u_i$  为位移分量;  $F_i$  为洛伦兹力分量;  $T$  为绝对温度;  $T_0$  为初始温度;  $\kappa$  为热传导系数;  $\tau_1$ 、 $\tau_2$  为热松弛时间;  $\rho$  为质量密度;  $c_E$  为常体积下的比热;  $\lambda$ 、 $\mu$  为拉梅常数;  $g = (3\lambda + 2\mu)\alpha$ ;  $\alpha$  为线性热膨胀系数;  $\xi^2$  为 Laplace 算子.

考虑一理想导体的半无限大电磁介质的二维问题( $x \geq 0$ ),所考虑的物理量是时间  $t$  和坐标  $x, y$  的函数.电磁介质置于磁场强度为  $\mathbf{H} = (0, 0, H_0)$  的磁场中,  $\mathbf{H}$  的方向沿着坐标  $z$  方向.  $t = 0$ , 电磁介质表面上受到热冲击作用.由于  $\mathbf{H}$  的作用,介质中产生了感应的磁场  $\mathbf{h}$  和电场  $\mathbf{E}$ .

位移具有以下分量

$$u_x = u(x, y, t), \quad u_y = v(x, y, t), \quad u_z = 0 \quad (6)$$

由式(4,6)可以得到应变分量

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & e_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ e_{xz} &= e_{yz} = e_{zz} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

由式(2,7)可以得到应力分量

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} - \gamma(T - T_0 + \tau_1 T) \\ \sigma_{yy} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma(T - T_0 + \tau_1 T) \\ \sigma_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

由式(1)可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mu_0 H_0 (-v, u, 0), & \mathbf{h} &= -H_0 (0, 0, e) \\ \mathbf{J} &= (-H_0 e_y, +\epsilon_0 \mu_0 H_0 v, H_0 e_x - \epsilon_0 \mu_0 H_0 \dot{u}, 0) \end{aligned}$$

式中:  $e$  是体积膨胀率,其表达式为

$$e = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y \quad (9)$$

从而,由式(5)可以得到

$$\begin{aligned} F_x &= \mu_0 H_0^2 \left\{ \frac{\partial e}{\partial x} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} \\ F_y &= \mu_0 H_0^2 \left\{ \frac{\partial e}{\partial y} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right\} \\ F_z &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

由式(3,8,10)可以得到

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u - \gamma \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial x} \right\} + \mu_0 H_0^2 \left\{ \frac{\partial e}{\partial x} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 v - \gamma \left\{ \frac{\partial T}{\partial y} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial y} \right\} + \mu_0 H_0^2 \left\{ \frac{\partial e}{\partial y} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right\} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned}$$

为了便于计算,引入下面的无量纲量

$$\begin{aligned} x^* &= c_1 \xi, & y^* &= c_1 \eta, & u^* &= c_1 \mathbf{u} \\ v^* &= c_1 \eta v, & t^* &= c_1^2 \tau, & \tau_i^* &= c_1^2 \tau_i \\ \sigma_{ij}^* &= \sigma_{ij} / \mu, & \theta &= \gamma(T - T_0) / \rho c_E^2, & \eta &= \rho c_E / \kappa \\ c_1^2 &= (\lambda + 2\mu) / \rho + \mu_0 H_0^2 / \rho & (\xi &= 1, 2) \end{aligned} \quad (11)$$

利用式(11)中定义无量纲量,上述的控制方程经无量纲化处理可以得到(为了方便起见,省去各量右上方的\*号)

$$(\beta^2 - 1) \frac{\partial e}{\partial x} + \nabla^2 u - \beta^2 \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial x} + \tau_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t \partial x} \right\} = \alpha_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (12)$$

$$(\beta^2 - 1) \frac{\partial e}{\partial y} + \nabla^2 v - \beta^2 \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial y} + \tau_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t \partial y} \right\} = \alpha_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (13)$$

$$\nabla^2 \theta = \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \tau_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} + \epsilon_1 \frac{\partial e}{\partial t} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{式中} \quad \beta^2 &= c_1^2 / c_1^2, & \alpha_0 &= \alpha \beta^2, & \epsilon_1 &= T_0 \gamma^2 / \rho^2 c_E \mu_0^2 \\ c^2 &= 1 / \epsilon_0 \mu_0, & c_2 &= (\mu / \rho)^{1/2} \\ \alpha &= 1 + \alpha_0^2 / c^2, & \alpha_0^2 &= \mu_0 H_0^2 / \rho \end{aligned}$$

本构方程简化为

$$\sigma_{xx} = (\beta_0^2 - 2)e + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \beta^2 \left\{ \theta + \tau_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\} \quad (15)$$

$$\sigma_{yy} = (\beta_0^2 - 2)e + 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \beta^2 \left\{ \theta + \tau_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\}$$

$$\sigma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \quad (16)$$

式中:  $\beta_0^2 = (\lambda + 2\mu) / \mu$ .

由式(12,13)可得

$$\left[ \nabla^2 - \alpha \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] e - \left[ 1 + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \right] \nabla^2 \theta = 0 \quad (17)$$

### 2 正则模态分析

根据正则模态法,各物理量的解的形式分解为

$$[u, v, e, \theta, \varphi_j](x, y, t) = [u^*(x), v^*(x), e^*(x), \theta^*(x), \varphi_j^*(x)] \exp(\omega t + iay) \quad (18)$$

式中:  $\omega$  是复时间常量;  $a$  是  $y$  向的波数.

由式(14, 17, 18)可得

$$(D^2 - a^2 - \omega - \tau_2 \omega^2) \theta^*(x) = \epsilon_1 \omega e^*(x) \quad (19)$$

$$(D^2 - a^2 - \alpha \omega^2) e^*(x) - (1 + \tau_1 \omega)(D^2 - a^2) \theta^*(x) = 0 \quad (20)$$

式中:  $D = \partial/\partial x$ .

式(19, 20)消去  $\theta^*(x)$ , 得到  $e^*(x)$  所满足的偏微分方程

$$(D^4 - AD^2 + C)e^*(x) = 0$$

式中  $A = 2a^2 + b_1, C = a^4 + a^2 b_1 + b_2$

$$b_1 = \omega(1 + \tau_2 \omega) + \alpha \omega^2 + \epsilon_1 \omega(1 + \tau_1 \omega)$$

$$b_2 = \alpha \omega^3(1 + \tau_2 \omega).$$

类似可得  $\theta^*(x)$  所满足的偏微分方程

$$(D^4 - AD^2 + C)\theta^*(x) = 0$$

根据根与系数的关系, 上式可表示为

$$(D^2 - k_1^2)(D^2 - k_2^2)e^*(x) = 0 \quad (21)$$

式中:  $k_i^2 (i = 1, 2)$  是特征方程  $k^4 - Ak^2 + C = 0$  的根.

式(21)的解具有如下的形式

$$e^*(x) = \sum_{i=1}^2 e_i^*(x) \quad (22)$$

式中:  $e_i^*(x)$  是  $(D^2 - k_i^2)e_i^*(x) = 0$  的解,  $i = 1, 2$ .

求解式(22), 注意在  $x \rightarrow \infty$  时解是有界的, 可得

$$e_i(x) = R_i(a, \omega) e^{-k_i x}$$

式中:  $R_i(a, \omega)$  为待定参数, 则

$$e^*(x) = \sum_{i=1}^2 R_i(a, \omega) e^{-k_i x} \quad (23)$$

$$\theta^*(x) = \sum_{i=1}^2 R_i'(a, \omega) e^{-k_i x} \quad (24)$$

式中:  $R_i'(a, \omega)$  为待定参数.

把式(23, 24)代入式(19), 可以得到

$$R_i' = \frac{\epsilon_1 \omega}{k_i^2 - a^2 - \omega(1 + \tau_2 \omega)} R_i \quad (i = 1, 2) \quad (25)$$

将式(25)代入式(24), 得到

$$\theta^*(x) = \sum_{i=1}^2 \frac{\epsilon_1 \omega}{k_i^2 - a^2 - \omega(1 + \tau_2 \omega)} R_i e^{-k_i x} \quad (26)$$

由式(23, 26)可以推导得到

$$u^*(x) = Ga^2 e^{-m x} - \sum_{i=1}^2 \frac{k_i R_i}{k_i^2 - a^2} e^{-k_i x}$$

$$v^*(x) = -ia \left[ mGe^{-m x} - \sum_{i=1}^2 \frac{R_i}{k_i^2 - a^2} e^{-k_i x} \right]$$

$$\sigma_{xx}^*(x) = -2mGa^2 e^{-m x} + \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{2a^2}{k_i^2 - a^2} + \beta_0^2 - \frac{\beta^2 \epsilon_1 \omega(1 + \tau_1 \omega)}{k_i^2 - a^2 - \omega(1 + \tau_2 \omega)} \right\} R_i e^{-k_i x}$$

$$\sigma_{xy}^*(x) = -ia \left[ 2 \sum_{i=1}^2 \frac{k_i R_i}{k_i^2 - a^2} e^{-k_i x} - (m^2 + a^2) Ge^{-m x} \right]$$

式中:  $m^2 = a^2 + \alpha_0 \omega^2; G = G(a, \omega)$  为待定参数.

为了确定其中的待定参数  $R_i (i = 1, 2)$  及  $G$ , 需考虑边界条件( $x = 0$ ): 1) 热边界条件即介质表面受到热冲击的作用  $\theta(0, y, t) = f(y, t)$ ; 2) 力边界条件即介质表面的应力自由  $\sigma_{xx}(0, y, t) = \sigma_{xy}(0, y, t) = 0$ . 将各物理量的表达式代入上述的边界条件可得

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\epsilon_1 \omega}{k_i^2 - a^2 - \omega(1 + \tau_2 \omega)} R_i = f^*(a, \omega) -$$

$$2mGa^2 + \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{2a^2}{k_i^2 - a^2} + \beta_0^2 -$$

$$\frac{\beta^2 \epsilon_1 \omega(1 + \tau_1 \omega)}{k_i^2 - a^2 - \omega(1 + \tau_2 \omega)} \right] R_i = 0$$

$$2 \sum_{i=1}^2 \frac{k_i R_i}{k_i^2 - a^2} - (m^2 + a^2) G = 0$$

(27)

求解式(27), 可得

$$G = \frac{2}{m^2 + a^2} \left[ \frac{k_1}{k_1^2 - a^2} R_1 + \frac{k_2}{k_2^2 - a^2} R_2 \right]$$

$$R_1 = -\frac{f^*(a, \omega) [\beta^2(1 + \tau_1 \omega)c_2 - d_2]}{c_1 d_2 - d_1 c_2}$$

$$R_2 = -\frac{f^*(a, \omega) [\beta^2(1 + \tau_1 \omega)c_1 - d_1]}{c_1 d_2 - d_1 c_2}$$

$$c_1 = \epsilon_1 \omega / [k_1^2 - a^2 - \omega(1 + \tau_2 \omega)]$$

$$c_2 = \epsilon_1 \omega / [k_2^2 - a^2 - \omega(1 + \tau_2 \omega)]$$

$$d_1 = \frac{-4ma^2 k_1}{(m^2 + a^2)(k_1^2 - a^2)} + \frac{2a^2}{k_1^2 - a^2} + \beta_0^2$$

$$d_2 = \frac{-4ma^2 k_2}{(m^2 + a^2)(k_2^2 - a^2)} + \frac{2a^2}{k_2^2 - a^2} + \beta_0^2$$

### 3 算例

施加于介质表面的热冲击  $f(y, t)$  的表达式为

$$f(y, t) = \theta_0 H(L - |y|) \quad (28)$$

式中:  $H$  为单位阶跃函数;  $\theta_0$  为一常量. 式(28)表示介质表面  $-L \leq y \leq L$  的窄带上受到幅值为  $\theta_0$  的热冲击作用.

考虑理想导体为铜材料, 计算中所需材料性能参数可参见文[6]. 由于  $\omega$  是复时间常量, 即其具有形式  $\omega = \omega_0 + i\xi$ , 而  $e^{\omega t} = e^{\omega_0 t} (\cos \xi t + i \sin \xi t)$ , 在时间  $t$  极小时, 可令  $\omega = \omega_0$ . 考虑在  $y = 0$  平面上温度、位移、应力、感应的磁场和感应的电场分别在时刻  $t = 0.01$  和  $t = 0.10$  时的分布情况, 给定  $\tau_1 = 0.03$ ,

$\tau_2 = 0.02, \theta_0 = 1, \omega_0 = 2$  及  $\alpha = 1.2$ , 计算得到无量纲的温度、位移、应力、感应的磁场和感应的电场表达式中实数部分的分布分别见图 1~5。

磁介质置于磁场中, 受热冲击作用而产生膨胀

变形, 由于外加磁场的作用, 从而在介质中产生感应的磁场强度和电场强度。由介质的几何对称性及热边界条件的对称性可知, 在  $y = 0$  的平面上, 位移分量  $v$  及感应的电场强度分量  $E_1$  为零。

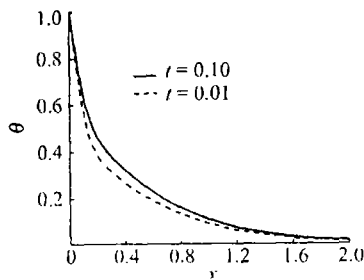


图1 温度分布  
Fig.1 Temperature distribution

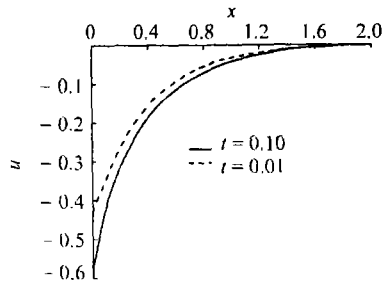


图2 位移分量 u 的分布  
Fig.2 Distribution of displacement component u

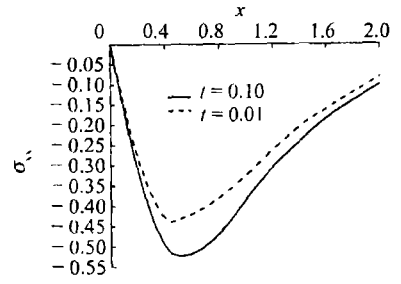


图3 应力分量  $\sigma_{xx}$  的分布  
Fig.3 Stress  $\sigma_{xx}$  distribution

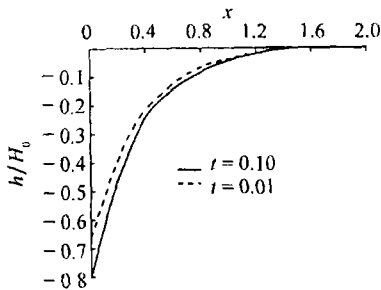


图4 感应磁场 h 的分布  
Fig.4 Induced magnetic field h distribution

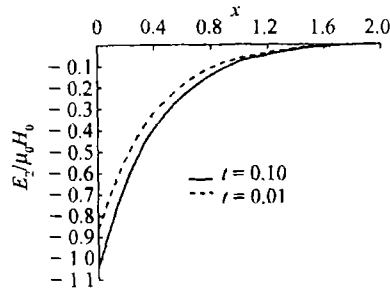


图5 感应电场分量  $E_2$  的分布  
Fig.5 Induced electric field  $E_2$  distribution

从以上各物理量的分布可以看出, 其值只在有限的区域内不为零, 而在超出该区域后值都是零, 即没有受到热扰动影响, 考虑不同时刻, 随着时间推移, 其不为零的区域也相应地在移动, 这说明热以波动形式在介质中进行传播, 给定不同时刻, 热波波前的位置也将相应地在介质中移动, 也即热波波前在介质中的位置随考虑时刻不同而不同, 这与经典的热传导是完全不同的, 它说明热是以波的形式以有限速度、而不是以无限速度在介质中进行传播的。

## 4 结论

磁介质受热发生变形, 变形的介质在磁场作用下产生了感应的磁场和电场, 体现了磁热弹性的相互耦合效应。热在介质中的传播呈现波动性, 热波波前的位置随考虑时刻的不同而相应地进行移动。

致谢: 本文工作受到了兰州理工大学硕博基金的资助, 在此深表感谢!

### 参考文献:

[1] LORD H W, SHULMANN Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity [J]. *J Mech Phys Solids*, 1967, 15: 299-309.

[2] GREEN A E, LINDSAY K E. Thermoelasticity [J]. *J Elasticity*, 1972, 2: 1-7.

[3] SHARMA J N, CHAND D. Transient generalized magneto-thermoelastic waves in a half space [J]. *Int J Engng Sci*, 1988, 26(9): 951-958.

[4] CHANDRASEKHARAI AH DS, SRINATH K S, DEBNATH L. Magneto-thermoelastic disturbances with thermal relaxation in a solid due to heat sources [J]. *Comput Math Applic*, 1988, 15(6-8): 483-490.

[5] SHERIEF H H, EZZAT M A. A problem in generalized magneto-thermoelasticity for an infinitely long annular cylinder [J]. *J Eng Mathematics*, 1998, 34: 387-402.

[6] SHERIEF H H, HELMY K A. A two dimensional problem for a half space in magneto-thermoelasticity with thermal relaxation [J]. *Int J Engng Sci*, 2002, 40: 587-604.

[7] CHOUDHURI R S K, CHATTERJEE R G. Temperature rate dependent magneto-thermoelastic waves in a finitely conducting elastic half space [J]. *Comput Math Applic*, 1990, 19(5): 85-93.

[8] EZZAT M A, OTHMAN M I, SMAAN A A. State space approach to two dimensional electro-magneto-thermoelastic problem with two relaxation times [J]. *Int J Engng Sci*, 2001, 39: 1383-1404.