

文章编号: 1000-4750(2006)11-0001-08

一种严密的结构最优控制极值条件及算法实现

杜永峰

(兰州理工大学防震减灾研究所, 兰州 730050)

摘 要: 针对结构振动控制的特点, 导出了可用于时域响应最优控制的极值条件。该组表达式对于采用线性二次型最优控制的强迫振动系统而言, 是概念上严密的极值条件。对比了几种现有最优控制算法的思路, 介绍了对结构控制算法建模思路进行改进的技术要点。利用伴随方程与状态方程形式上的相似性, 用数值方法实现了一种新的结构最优控制算法。选用由作者承担设计过的三个实际隔震工程作为算例, 对比了输入三种不同地震波时各种算法在模型表达和减震效果上的几个重要特点。

关键词: 结构振动控制; 控制算法; 最优控制; 基础隔震; 智能隔震

中图分类号: TU352.12 文献标识码: A

A RIGOROUS EXTREME VALUE CONDITION FOR OPTIMAL STRUCTURAL CONTROL AND ITS REALIZATION ALGORITHM

DU Yong-feng

(Institute of Earthquake Protection and Disaster Mitigation, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: An extreme value condition is derived for optimal control to time-domain response of structures subjected to earthquake excitation by taking the special properties of structural vibration control into account. For the purpose of calculating the control force of a forced vibration system using LQR method, the extreme value condition presented in the study is conceptually rigorous. Several current algorithms for optimal control to structural vibration were compared, and the main improvement over the current algorithms was highlighted. A new algorithm of optimal control to structural vibration has been realized by using state transition method which is based on the similarity between the companion equation and the state equation. Three isolated buildings designed by the author are employed as numerical examples, and several important features such as the model expression and control effect of different algorithms are investigated due to three different earthquake signals.

Key words: structural vibration control; control algorithm; optimal control; base isolation; smart isolation

结构减震控制技术及其应用目前已成为工程抗震领域最具有活力的研究方向之一。控制算法用来确定每个时刻控制力的大小, 对控制效果的优劣起着举足轻重的作用^[1,2]。线性二次型最优控制算法(LQR)作为控制理论的基础, 在土木工程振动控制中得到很广泛的应用。然而, 目前 LQR 算法在时域响应控制方面的两种实现, 是在结构控制研究的

初期建立的近似解。由于地震波事先未知, 有些文献不得不假定地震激励服从某种统计规律^[3]。事实上, 结构地震响应控制主要针对的问题是随机地震激励的每一个具体实现, 建立合理的时域响应控制算法, 在工程上和学术上都有重要意义。现有的两种时域内结构最优控制算法都对原问题做了简化处理。一种是从激励的角度进行简化, 即忽略外部

收稿日期: 2005-03-07; 修改日期: 2006-07-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50548016)

作者简介: 杜永峰(1962), 男, 甘肃正宁人, 教授, 博士, 博导, 主要从事结构工程研究(E-mail: dooyf@lut.cn)

地震激励,将原问题近似退化为经典最优控制理论中求解 Riccati 方程的问题^[4];另一种是从控制目标函数的角度进行简化,即所谓的瞬时最优控制^[5]。第一种近似算法,从概念上讲不是真正的最优控制^[6];第二种近似算法,即瞬时最优控制算法,模型的物理意义存在明显缺陷,控制力的数学表达式有矛盾之处。本文作者吸取了几种常见的最优控制算法模型的优点,建立了一种数学和力学概念更为严密的结构时域振动最优控制算法,即序列最优控制算法,并分别针对线性结构和滞变结构加以实现。大量的数值模拟表明,不论是采用全状态反馈,还是输出加权控制,本文作者建立的时域振动最优控制算法的模型更合理,概念更严密,用于时域振动控制的综合效果优于现有的两种同类结构最优控制算法。

1 二次型最优控制的一般极值条件

对于线性剪切型受控结构,状态空间方程为

$$\{\dot{U}\} = [A]\{U\} + [B]\{f_c\} + \{E\}\ddot{u}_g \quad (1a)$$

$$\{y\} = [C_y]\{U\} + [D_y]\{f_c\} + \{W\}\ddot{u}_g \quad (1b)$$

这里, $\{U\}$ 为由各质点相对于地面的位移及速度定义的状态向量, $\{f_c\}$ 为控制力向量, $\{y\}$ 为输出向量, \ddot{u}_g 为地震地面运动加速度,其它符号的意义及表达式见文[7,8]。根据式(1),状态反馈最优控制的二次型控制目标函数(品质因子)可表达为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{1}{2}\{U\}^T [Q] \{U\} + \frac{1}{2}\{f_c\}^T [R] \{f_c\} \right] dt \quad (2)$$

式(2)中, $[Q]$ 和 $[R]$ 分别为体现对减小结构响应和节省控制能量这两个子目标重视程度的权重矩阵。 t_0 和 t_f 分别为控制起始及终了时刻。在经典最优控制理论中,定义如下的 Hamilton 函数

$$\begin{aligned} H(\{U\}, \{f_c\}, \{\lambda\}, t) = & \frac{1}{2}\{U(t)\}^T [Q] \{U(t)\} + \\ & \frac{1}{2}\{f_c(t)\}^T [R] \{f_c(t)\} + \\ & \{\lambda\}^T ([A]\{U\} + [B]\{f_c\} + \{E\}\ddot{u}_g) \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)中, $\{\lambda\}$ 为 Lagrange 乘子向量。最优控制问题可以用如下 Lagrange 函数的无约束优化来表达求 $\{f_c(t)\}$

$$\begin{aligned} \min L(\{U\}, \{f_c\}, \{\lambda\}, t) = \\ \int_{t_0}^{t_f} (H(\{U\}, \{f_c\}, \{\lambda\}, t) - \{\lambda\}^T \{\dot{U}\}) dt \end{aligned} \quad (4)$$

对式(4)中第二项分部积分,得

$$\begin{aligned} -\int_{t_0}^{t_f} \{\lambda\}^T \{\dot{U}\} dt = & -\{\lambda(t_f)\}^T \{U(t_f)\} + \\ & \{\lambda(t_0)\}^T \{U(t_0)\} + \int_{t_0}^{t_f} \{\dot{\lambda}\}^T \{U\} dt \end{aligned} \quad (5)$$

将式(5)代入式(4),则 Lagrange 函数的变分为

$$\begin{aligned} \delta L = & -\{\lambda(t_f)\}^T \{\delta U(t_f)\} + \{\lambda(t_0)\}^T \{\delta U(t_0)\} + \\ & \int_{t_0}^{t_f} \left(\left\{ \frac{\partial H}{\partial \{U\}} \right\}^T \{\delta U\} + \left\{ \frac{\partial H}{\partial \{f_c\}} \right\}^T \{\delta f_c\} \right) dt + \\ & \int_{t_0}^{t_f} \{\dot{\lambda}\}^T \{\delta U\} dt \end{aligned} \quad (6)$$

由状态向量的初值条件和控制终了时刻的终端条件,可得如下表达式

$$\{\delta U(t_0)\} = 0, \quad \{\lambda(t_f)\} = 0 \quad (7)$$

将式(7)代入式(6),由变分的任意性,可得经典最优控制理论中的伴随方程和极值条件

$$\{\dot{\lambda}\} = -\left\{ \frac{\partial H}{\partial \{U\}} \right\}, \quad \{\lambda(t_f)\} = 0 \quad (8a)$$

$$\left\{ \frac{\partial H}{\partial \{f_c\}} \right\} = 0 \quad (8b)$$

将式(3)中的 Hamilton 函数表达式代入式(8)中,可得线性结构最优控制的一般表达式

$$\{f_c\} = -[R]^{-1}[B]^T \{\lambda\} \quad (9a)$$

$$\{\dot{\lambda}\} = -[A]^T \{\lambda\} - [Q]\{U\}, \quad \{\lambda(t_f)\} = 0 \quad (9b)$$

$$\{\dot{U}\} = [A]\{U\} + [B]\{f_c\} + \{E\}\ddot{u}_g \quad (9c)$$

将式(2)中的状态向量 $\{U(t)\}$ 用输出向量 $\{y(t)\}$ 取代,则可构造出输出加权目标函数。仿照式(3)~式(8),也可以建立与式(9)类似的输出加权极值条件^[7]。

2 现有两种算法的模型及不足

2.1 退化 Riccati 近似算法

由于经典最优控制理论针对的是没有外部激励的情形,而结构地震响应控制问题的主要特征是存在外部地震激励,且该激励的值事先未知。为求解控制力,现有文献在式(9)的基础上,假设 $\{\lambda\}$ 与状态向量 $\{U\}$ 之间存在如下的关系

$$\{\lambda(t)\} = [P(t)]\{U(t)\} + \{q(t)\} \quad (10)$$

式(10)中, $[P(t)]$ 和 $\{q(t)\}$ 分别为待求的反馈矩阵和地震激励的前馈向量。由于地震波事先未知,一种近似算法是将 $\{q(t)\}$ 和 $\ddot{u}_g(t)$ 同时设为 0,将原问题退化为经典理论中求解 Riccati 方程的问题^[4]。求得反馈矩阵 $[P(t)]$ 后,再由下式获得最优控制力

$$\{f_c\} = -[R]^{-1}[B]^T[P(t)]\{U(t)\} \quad (11)$$

2.2 瞬时最优控制理论

这种近似算法是从目标函数的角度进行简化, 即将微分形式的状态方程(9c)化为差分方程^[5]

$$\{U(t)\} =$$

$$\{D(t-\Delta t)\} + \frac{\Delta t}{2}([\{B\}\{f_c(t)\} + \{E\}\ddot{u}_g(t)) \quad (12)$$

式(12)中, $\{D(t-\Delta t)\}$ 是一个只与过去时刻的状态有关的量。然后, 再在每个瞬时构造目标函数

$$J(t) =$$

$$\frac{1}{2}\{U(t)\}^T[Q]\{U(t)\} + \frac{1}{2}\{f_c(t)\}^T[R]\{f_c(t)\} \quad (13)$$

引入 Lagrange 函数后, 可以获得瞬时控制力

$$\{\lambda(t)\} = -[Q]\{U(t)\} \quad (14a)$$

$$\{f_c\} = \frac{\Delta t}{2}[R]^{-1}[B]^T\{\lambda(t)\} \quad (14b)$$

2.3 两种近似算法的特点及不足之处

(1) 退化 Riccati 近似算法

优点: 求解工具较为成熟, 算法表达比较简单;

缺点: 把原本需要控制的地震激励去掉, 因而, 从建模的概念上讲, 不是真正的最优控制。

(2) 瞬时最优控制算法

优点: 考虑了地震输入结构实际过程的时间顺序, 较合理地利用了地震激励反馈的已知信息。因为不论外部激励是确定性的波, 还是随机地震波, 都是随着时间的推移, 逐步输入到结构系统中的。过去时刻的地震激励和控制力一旦施加到结构中, 对结构系统的影响在实时的情况下已经成为定值, 无法改变, 而未来的作用还没有施加到结构中去。在当前时刻寻求适当的控制力使响应极小化, 是很自然的想法, 符合 Bellman 动态优化法则的理念。

缺点: 从物理意义上来讲, 无论施加多大的控制力, 都无法瞬时改变系统当前的响应状态, 而瞬时最优控制算法的目标函数表达式(13)中只使用了当前时刻的响应, 优化的物理概念存在缺陷; 从数学处理手段上来讲, 由式(3)~式(8)可见, 不论是状态反馈, 还是输出加权控制, 经典最优控制极值条件导出过程中引用了一个很重要的条件式(8), 就是依据受控状态向量的初始和终端条件。瞬时最优控制算法对含有差分方程的目标函数求导的做法, 截断了控制力的后效。在采用理想传感装置的前提下, 式(12)已经包含了当前时刻的控制力与当前时刻的状态向量之间的如下反馈关系

$$\{f_c(t)\} =$$

$$\frac{2}{\Delta t}[B]^{-1}(\{U(t)\} - \{D(t-\Delta t)\}) - \{E\}\ddot{u}_g(t) \quad (15)$$

显然, 式(15)与导出的极值条件式(14b)是矛盾的。

3 最优控制算法建模思路的改进

3.1 改进算法的思想要点

对现有算法改进, 要吸取现有最优控制算法的优点, 有针对性地解决所面临的难点。在建立退化 Riccati 近似算法时, 假定对于地震响应控制而言, 面临的困难是地震波预先未知, 因此忽略了地震波; 瞬时最优控制算法的优点在于将地震激励作为一种已知的反馈信息加以利用。

本文分析了结构认为用经典最优控制的算法求解面临的困难主要有两个, 除了通常所提到的地震波预先未知外, 另一个不可忽视的事实是, 地震激励的存在使得传统形式的 Riccati 微分方程多出了一项非齐次项。也就是说, 即使输入激励在所有时刻预先全部已知, 直接引用经典表达形式的 Riccati 微分方程也无法求解。一种设想是把地震激励项与控制力项合并成为一个向量, 再套用经典最优控制算法的模型式(9)加以求解。但是, 由于地震作用与控制力向量的作用点及维数一般存在差异, 采用这种做法, 又需要解决增广后的控制力向量取得极值的评价标准问题, 而建立这样的评判模型相当复杂。

本文采用比较直接的方法克服了上述两个难点。对于第一个难点, 本文改进的出发点是吸取瞬时最优控制算法的优点, 即仍然采取将控制目标函数化解到每个瞬时的做法, 在每个时间步长上建立动态最优极值条件。第二个难点, 是从式(9b)所表达的微分方程中求解 Lagrange 乘子向量, 而不再寻求式(9b)的解析表达式。第一个改进, 需要在每个时间步长上重新建立极值条件, 本节将首先导出该极值条件, 下一节将介绍第二点改进。

3.2 控制目标函数的序列脉冲化

将地震波和控制力转化为一系列时间域上的脉冲, 如图 1 所示。图中, U_i 代表第 i 个脉冲所产生的响应, T_D 代表地震波持时, T_{cD} 代表控制持时。

借鉴离散系统最优控制的 Bellman 最优法则和瞬时最优控制的思想, 把目标函数分解到每个时间步长上。由于未来时刻的脉冲尚未作用到系统中, 结构系统在每个瞬时的响应状态由控制起始时刻

t_0 直到当前时刻 t_A 之间的所有脉冲迭加而成。设从 t_0 到 t_A 之间的时间步长为 j ,则系统当前时刻的响应向量由前 j 个脉冲响应迭加得到

$$\{U(t)\} = \{U_1(t)\} + \{U_2(t)\} + \cdots + \{U_j(t)\} = \sum_{i=1}^j \{U_i(t)\} \quad (16)$$

利用式(16),就将目标函数分解到每个时间步长上。此时,在每个瞬时建立控制反馈方程,每个瞬时的地震激励便成为已知信息。

3.3 基于序列控制目标函数的最优控制力模型

将式(16)中当前与过去时刻脉冲的影响分离,得:

$$\{U(t)\} = \{U_{\Sigma(j-1)}(t)\} + \{U_j(t)\} \quad (17)$$

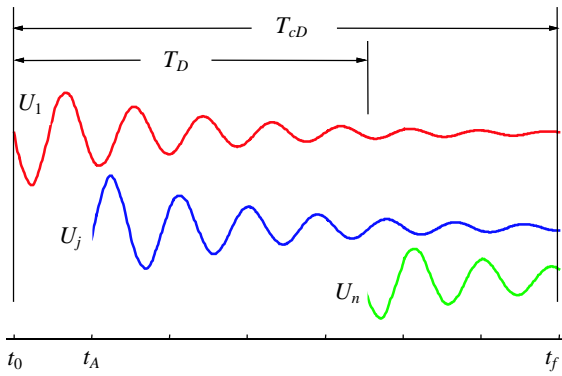


图 1 地震作用的序列脉冲响应

Fig.1 Impulse response to seismic excitation

式(17)中,下标“ $\Sigma(j-1)$ ”代表直到第 $(j-1)$ 个步长上(所有过去时刻)脉冲影响的总和。将式(17)代入式(4),并用类似的下标表示地震激励及控制力,则时刻 t_A 所对应的 Lagrange 函数为:

$$\begin{aligned} L(\{U_{\Sigma(j-1)}\}, \{U_j\}, \{f_c(t_{\Sigma(j-1)})\}, \{f_c(t_A)\}, \{\lambda\}, t_A) = & -\{\lambda(t_f)\}^T \{U_{\Sigma(j-1)}(t_f)\} + \{\lambda(t_0)\}^T \{U_{\Sigma(j-1)}(t_0)\} - \\ & \{\lambda(t_f)\}^T \{U_j(t_f)\} + \{\lambda(t_A)\}^T \{U_j(t_A)\} + \\ & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{U_{\Sigma(j-1)}\}^T [Q] \{U_{\Sigma(j-1)}\} dt + \\ & \frac{1}{2} \int_{t_A}^{t_f} \{U_j\}^T [Q] \{U_j\} dt + \int_{t_A}^{t_f} \{U_j\}^T [Q] \{U_{\Sigma(j-1)}\} dt + \\ & \frac{\Delta t}{2} \{f_c(t_{\Sigma(j-1)})\}^T [R] \{f_c(t_{\Sigma(j-1)})\} + \\ & \frac{\Delta t}{2} \{f_c(t_A)\}^T [R] \{f_c(t_A)\} + \\ & \int_{t_0}^{t_f} \{\lambda\}^T [A] \{U_{\Sigma(j-1)}(t)\} dt + \int_{t_A}^{t_f} \{\lambda\}^T [A] \{U_j(t)\} dt + \\ & \{\lambda\}^T [B] \{f_c(t_{\Sigma(j-1)})\} \Delta t + \{\lambda\}^T [B] \{f_c(t_A)\} \Delta t + \\ & \{\lambda\}^T [E] \{\ddot{u}_g(t_{\Sigma(j-1)})\} \Delta t + \{\lambda\}^T [E] \{\ddot{u}_g(t_A)\} \Delta t + \end{aligned}$$

$$\int_{t_0}^{t_f} \{\dot{\lambda}\}^T \{U_{\Sigma(j-1)}(t)\} dt + \int_{t_A}^{t_f} \{\dot{\lambda}\}^T \{U_j(t)\} dt \quad (18)$$

在式(18)中,含有下标为 j 的各项积分下限从 t_A 开始,是因为当前时刻的脉冲只影响当前时刻和未来时刻的响应,对过去时刻的响应没有影响。将纯粹包含过去时刻影响项分离开来,记作 L_{j-1} ,得

$$L(\bullet) = L_{j-1}(\{U_{\Sigma(j-1)}\}, \{f_c(t_{\Sigma(j-1)})\}, \{\lambda\}, t) + L_j(\{U_{\Sigma(j-1)}\}, \{U_j\}, \{f_c(t_A)\}, \{\lambda\}, t) \quad (19)$$

由泛函变分的计算规则可知,过去时刻脉冲对系统响应的影响已经为定值,因此, L_{j-1} 对当前时刻的控制目标函数变分 δL 没有贡献,于是有

$$\begin{aligned} \delta L = & -\{\lambda(t_f)\}^T \{\delta U_j(t_f)\} + \{\lambda(t_A)\}^T \{\delta U_j(t_A)\} + \\ & \frac{\partial L_j}{\partial \{U_{\Sigma(j-1)}\}} \{\delta U_{\Sigma(j-1)}\} + \frac{\partial L_j}{\partial \{U_j\}} \{\delta U_j\} + \\ & \frac{\partial L_j}{\partial \{f_c(t_A)\}} \{\delta f_c(t_A)\} \end{aligned} \quad (20)$$

注意到过去时刻和当前时刻的状态向量已经为定值,并引用终端条件,得

$$\{\delta U_{\Sigma(j-1)}\} = 0 \quad (21a)$$

$$\{\delta U_j(t_A)\} = 0, \quad \{\lambda(t_f)\} = 0 \quad (21b)$$

由泛函变分等于0的条件,可导出如下的极值条件

$$\{f_c(t_A)\} = -[R]^{-1} [B]^T \{\lambda(t_A)\} \quad (22a)$$

$$\{\dot{\lambda}\} = -[A] \{\lambda\} - [Q] \{U\}, \quad \{\lambda(t_f)\} = 0 \quad (22b)$$

$$\{\dot{U}\} = [A] \{U\} + [B] \{f_c\} + [E] \ddot{u}_g \quad (22c)$$

式(22)与式(9)的极值条件非常相似,后两式的表达形式完全相同,但一个重要区别在于此时的控制力只在当前时刻 t_A 有定义,并且式(22b)和式(22c)的定义域变为 $[t_A, t_f]$ 。只要在每个时间步长上联立求解微分方程组(22),就可以求得各个时间步长上的最优控制力。这样,就把原来的最优控制问题化解为以每个时间步长上的目标函数为极小化对象的一系列最优控制问题,仿照优化理论中“序列线性规划”的名词,作者将本文算法命名为“序列最优控制”^[8]。虽然式(22b)的导出,是在把地震波简化为一系列脉冲响应的前提下实现的,但该组表达式对于计算每个瞬时强迫振动系统的控制力而言,是概念上严密的极值条件。

4 序列最优控制算法的实现

上节中导出的序列最优控制极值条件式(22),与经典最优控制形式上相似。只要设法求解出

Lagrange 乘子向量, 就可以获得理想控制力的值。然而, 由式(22b)可以看出, 即使输入激励在所有时刻全部已知, 直接引用经典形式的 Riccati 微分方程也无法求解, 因为地震激励的存在使得传统的 Riccati 微分方程多出了一项非齐次项。这就是本文上节中所指出的经典最优控制理论应用于结构地震响应控制问题时遇到的第二个难点。现有的两种时域内结构最优控制算法, 都试图用解析的方式推导出控制力, 无法解决第二个难点。本文从伴随方程式(22b)与状态空间方程(22c)形式上的相似性出发, 直接从式(22b)中求解 $\{\lambda\}$ 。由于求解 $\{\lambda\}$ 时需要满足终值条件, 在每个时刻来看, 当前瞬时及其以前各个时刻的激励作用到了系统上, 而未来时刻的激励还没有来到。因此, 在每个时间步长上, 当前时刻与终了时刻这个时间区间内的状态向量 $\{U\}$ 的值应该理解为在当前时刻的激励及控制力共同作用下系统的自由振动响应, 而过去时刻激励及控制力对系统的作用体现在当前时刻的响应中。这样, 在每个瞬时应用式(22)时, 所有必要的信息都是已知的。根据这一思想, 本文利用状态转移算法构造如下的递推式, 并分别在全状态反馈和输出加权控制问题中实现。

4.1 基于状态反馈的序列最优控制算法

(1) 先用式(22c)计算距当前时刻一个时间步长, 即 $t_1 = t_A + \Delta t$ 时的响应。注意到除当前时刻外, 结构上没有外部激励

$$\{U(t_1)\} = e^{[A]\Delta t} (\{U(t_A)\} + \Delta t\{E\}\ddot{u}_g(t_A)) \quad (23a)$$

同理, 可以得出

$$\begin{aligned} \{U(t_j)\} &= e^{[A]j\Delta t} (\{U(t_A)\} + \Delta t\{E\}\ddot{u}_g(t_A)) \\ t_j &= t_A + j\Delta t, \quad j = 2, 3, \dots, m \end{aligned} \quad (23b)$$

这里, t_A 对应着当前时刻, m 对应着终了时刻的时间步长数。

(2) 从式(22b)中逆向计算距控制终了时刻一个时间步长的 $\{\lambda\}$ 值, 得

$$\begin{aligned} \{\lambda(t_{m-1})\} &= e^{-[A_\lambda]\Delta t} \{\lambda(t_m)\} - \Delta t e^{-[A_\lambda]\Delta t} [Q_\lambda] \{U(t_m)\} \\ t_{m-1} &= t_A + (m-1)\Delta t, \quad t_m = t_A + m\Delta t \end{aligned} \quad (24a)$$

$$[A_\lambda] = -[A]^T, \quad [Q_\lambda] = -[Q] \quad (24b)$$

在式(24a)中引用终值条件, 即 $\{\lambda(t_m)\} = 0$, 并将式(23b)代入式(24a), 有

$$\begin{aligned} \{\lambda(t_{m-1})\} &= -\Delta t e^{-[A_\lambda]\Delta t} [Q_\lambda] e^{[A]m\Delta t} \cdot \\ &(\{U(t_A)\} + \Delta t\{E\}\ddot{u}_g(t_A)) \end{aligned} \quad (24c)$$

在式(24b)中反复引用逆向递推, 最终可得

$$\begin{aligned} \{\lambda(t_A)\} &= -\Delta t [Q_A(m)] \cdot \\ &(\{U(t_A)\} + \Delta t\{E\}\ddot{u}_g(t_A)) \end{aligned} \quad (25a)$$

$$[Q_A(m)] = \sum_{j=1}^m e^{-[A_\lambda]j\Delta t} [Q_\lambda] e^{[A]j\Delta t} \quad (25b)$$

将式(25)代入式(22a), 可求得距控制终了时刻为 m 个时间步长的时刻所对应的理想控制力

$$\begin{aligned} \{f_c(t_A)\} &= \Delta t [I_{RU}(m)] \{U(t_A)\} + \\ &(\Delta t)^2 \{E_{RU}(m)\} \ddot{u}_g(t_A) \end{aligned} \quad (26)$$

$$[I_{RU}(m)] = [I_Q(m)]^{-1} [R_Q(m)] \quad (27a)$$

$$\{E_{RU}(m)\} = [I_{RU}(m)] \{E\}$$

$$[I_Q(m)] = [I] - (\Delta t)^2 [R_Q(m)] [B] \quad (27b)$$

$$[R_Q(m)] = [R]^{-1} [B]^T [Q_A(m)]$$

利用式(26), 式(27)计算出的控制力已经包含了当前时刻的控制力对结构响应的影响, 不必迭代。

4.2 基于输出加权的序列最优控制算法

基于输出加权时, 用输出向量 $\{y\}$ 取代状态向量 $\{U\}$, 则最优控制力可用类似过程导出

$$\begin{aligned} \{f_c(t_A)\} &= \\ [I_{Ry}(m)] \{U(t_A)\} &+ (\Delta t)^2 \{E_{Ry}(m)\} \ddot{u}_g(t_A) \end{aligned} \quad (28)$$

$$[I_{Ry}(m)] = [I_{Qy}(m)]^{-1} [r_Q(m)] \quad (29a)$$

$$\{E_y(m)\} = [I_{Qy}(m)]^{-1} \{E_r(m)\}$$

$$[r_Q(m)] = [r_1]^{-1} (\Delta t [B]^T [Q_A(m)] - [Q_d]^T) \cdot$$

$$\{E_r(m)\} = [r_1]^{-1} [B]^T [Q_A(m)] \{E\} \quad (29b)$$

$$[I_{Qy}(m)] = [I] - (\Delta t)^2 [r_1]^{-1} [B]^T [Q_A(m)] [B] \quad (29c)$$

5 本文算法的特点分析

5.1 与现有两种近似算法的联系与区别

本文算法的理想控制力极值条件式(27)与退化 Riccati 近似算法所引用的极值条件式(10)在形式上相似, 且都有一组方程需要利用控制终了时刻的终端条件, 从控制终了时刻逆向递推求解, 两种算法的推导思想同源。但是, 退化 Riccati 近似算法中直接略去了外部地震激励, 因而所求得最优控制力表达式中只包含当前时刻的状态向量。而本文算法的最优控制力不但包含状态向量, 还包含激励。据此, 本文算法的极值条件可视对经典 Riccati 方程的一种推广。本文算法与瞬时最优控制算法都采用了在每个时间步长上建立控制目标函数的做法, 使每个瞬时的地震激励能够成为已知信息得以利用。但瞬时最优控制算法只使用一个孤立时刻的响应构造控制目标函数, 截断了控制力作用的后效。而本

文算法使用当前时刻的脉冲所产生的直到控制终止时刻全部时间段上的响应来构造控制目标函数。因而采用本文的目标函数分解模式,经典最优控制理论中的泛函变分终端条件仍然能够成立。

5.2 本文算法的主要特点

(1) 本文算法对激励和目标函数引用更少的简化假定,因而模型更具一般性。(2) 对于强迫振动系统的响应控制,本文算法的极值条件是概念上严密的表达形式。因而,除了数值方法所固有的计算误差外,本文算法的建模概念是精确的,可以作为参照系,用来判别其它同类控制算法的优劣。(3) 利用本文算法导出的最优控制力系数式(26)~式(27)及式(28)~式(29),实际上是用代数方程取代了传统的Riccati微分方程,使本文算法的效率比经典最优控制算法有明显提高。并且,对于时不变系统,在整个分析过程中,该组系数一般只需计算一次。(4) 如需将本文算法用于在线控制,则与现有其它同类算法一样,需要进行智能化处理,以提高计算速度^[9]。

6 改进算法控制效果的数值模拟

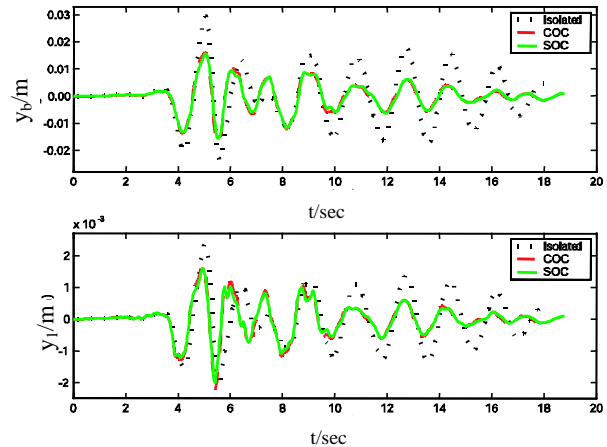
选取三个实际隔震工程作为算例,主要振动参数如文[10]表1所列。在隔震层部位处加装理想智能控制器,选用North Ridge(1994)、El Centro(1940)两条天然地震波和一条正弦波作为输入激励。

为使不同控制算法的效率有可比性,定义控制力的绝对积分为控制能量指标。将两条天然波幅值调为 0.706ms^{-2} ,正弦波的表达式为 $\ddot{u}_g(t) = 0.706\sin(2.2\omega_1 t)$ 。

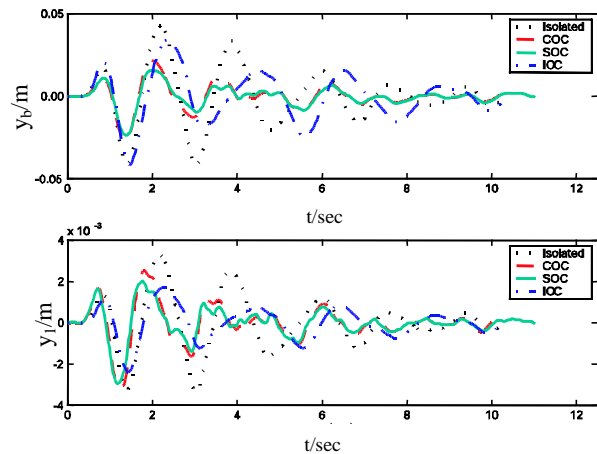
笔者在相同控制能量水准下分别针对状态反馈^[11]、输出加权^[7, 12]及算法的稳定性问题,对各种不同算法的控制效果进行对比,已经表明本文算法的综合性能优于现有两种时域内的结构最优控制算法。本文虽然选择了更多的地震波,并使用了更多的工程算例,但这里对已经揭示过的规律不再重复。仅结合论证本文建立的极值条件和最优控制力表达式的需要,强调如下几条数值规律:

(1) 无论输入激励是天然地震波,还是正弦波,本文所建议的算法(SOC)在每个工程算例中削减峰值响应的效果是几个算法中最好的。图2和图3分别列出了输入天然波和正弦波时的受控结构响应对比,图中还同时列出了被动隔震响应。每组图中,上图为隔震层位移响应,下图为上部结构最大的层间相对位移响应。可以看出,在各个图中,本文算

法所获得的峰值响应都是最小的。



(a) El Centro 波, 工程 2



(b) Northridge 波, 工程 2

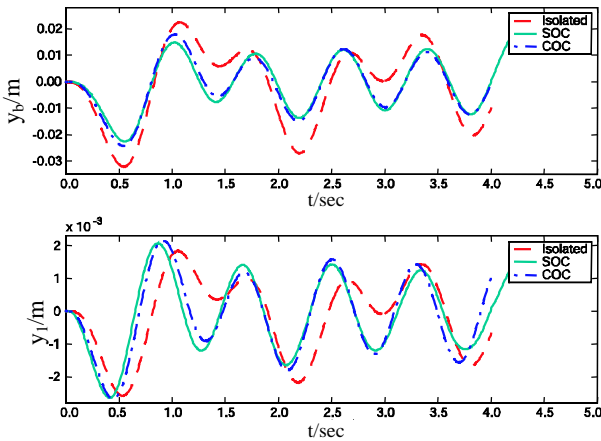
图2 输入天然波时的受控响应对比

Fig.2 Controlled response to natural earthquake signal input

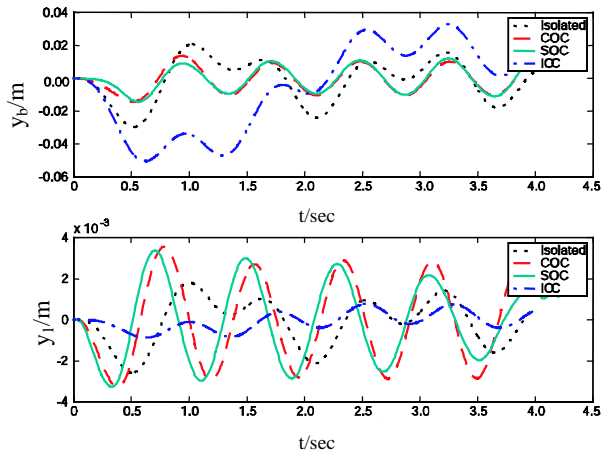
(2) 从上述同一组图中还可以看出,用退化Riccati算法(COC)所求得近似解与本文算法的响应结果相当接近。这是因为,导出退化Riccati近似算法时,虽然引用了忽略外部地震激励的假定,但是,对每一个瞬时求得的最优控制力而言,忽略的只是当前瞬时的地震激励,上个瞬时及以前所有时刻的地震激励对结构的影响已经包含在当前瞬时的结构响应之中了。从本文导出的最优控制力表达式(26)和式(28)可以看出,地震激励对控制力的影响项是与时间步长平方 $(\Delta t)^2$ 成正比,而时间步长在状态转移算法中一般是个微量。

(3) 另一方面,瞬时最优控制算法(IOC)则与本文算法的响应结果有明显的差别。这是因为,从瞬时最优控制算法极值条件表达式(17b)中可以看出,最优控制力与时间步长 Δt 成正比。在状态转移算法中,为了获得较高精度的数值计算结果,一般需要

将时间步长取得小一些,而这样做会使瞬时最优控制力减小。特别是对于输出加权的瞬时最优控制算法,控制力很难由权重矩阵进行调节,图 3a 突出地显示了这一点。本文改进后的控制力表达式(26)和式(28)中,虽然也包含与时间步长 Δt 成正比的项,但该项总是与 $[Q_A(m)]$ 同时出现,而 $[Q_A(m)]$ 是与 $m\Delta t$ 的幂函数 $e^{[A]m\Delta t}$ 成正比。 Δt 越小, m 越大,且 $[Q_A(m)]$ 的项数也越多,因此改进算法不至于因缩小时间步长而影响控制力大小。



(a) 工程 1

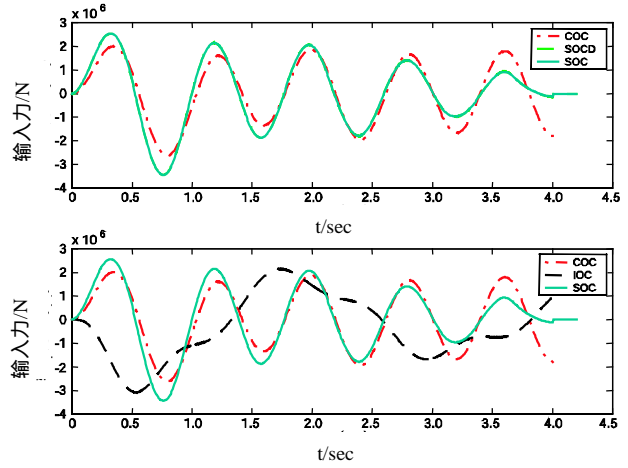


(b) 工程 2

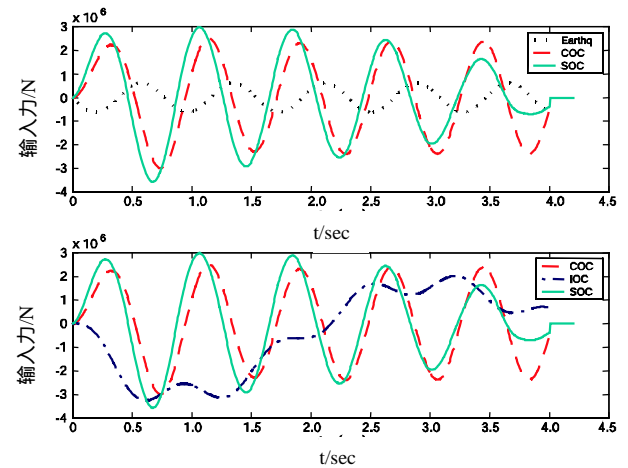
图 3 输入正弦波时的受控响应对比
Fig.3 Controlled response to sine wave input

(4) 进一步分析各种算法的控制力可知,本文算法在时域内能更好地跟踪外部激励和响应的特征,在控制时程的初期,控制力幅值取得略高一些,便于抑制输入系统中的能量积累^[8, 12]。即使对正弦波这类幅值为常量的激励,本文算法的控制力幅值变化也很明显,在控制时程的初期取值很高,在尾部能很快减小,如图 4 所示。退化 Riccati 近似算法的控制力平均值接近本文算法,但其控制力幅值在

全部时程上的变化很缓慢。这是因为,对时不变体系,经典最优控制的增益矩阵在控制时段的大部分区间上是常量。从图 4 的上图还可以看出,输出加权瞬时最优近似算法的控制力不但数值上不能跟踪响应峰值,而且相位方面也有明显差异。



(a) 工程 1



(b) 工程 3

图 4 输入正弦波时的控制力对比
Fig.4 Control force to sinusoidal wave input

7 结论

(1) 本文结合结构地震响应控制的特点,在每个时间步长上用脉冲响应构造控制目标函数,直接利用泛函变分,导出了针对强迫振动系统时域响应最优控制的极值条件。根据伴随方程与状态空间方程形式上的相似性,用状态转移方法加以实现。本文的极值条件是概念上严密的表达式。

(2) 数值模拟的结果表明,退化 Riccati 近似算法虽然在建模时略去了外部激励,但仍是两种近似算法中比较有效的;瞬时最优控制算法在控制目标函数的物理表达和建立极值条件的数学手段上都

存在一定缺陷,控制效果不够理想,特别是不适用于输出加权控制。

参考文献:

- [1] 周福霖. 工程结构减震控制[M]. 北京:地震出版社, 1997
Zhou Fulin. Seismic control of engineering structures [M]. Beijing: Seismology Press, 1997. (in Chinese)
- [2] 欧进萍. 结构振动控制—主动、半主动和智能控制[M]. 北京:科学出版社, 2003.
Ou Jinping. Structural vibration control—active, semi-active and smart control [M]. Beijing: Scientific Press, 2003. (in Chinese)
- [3] Suhardjo J, Spencer Jr B F, Sain M K. Feedback-feedforward control of structures under seismic excitation [J]. Structural Safety, 1990, 8: 69~89.
- [4] Abdel-Rohman, M, Leipholz H H E. Automatic active control of structures [J]. J Structural Engineering Div., ASCE, 1980, 106: 663~677.
- [5] Yang J N, Akbarpour A, Ghaemmaghami P. New optimal control algorithms for structural control [J]. J. Engineering Mechanics, ASCE, 1987, 113(9): 1369~1386.
- [6] Soong T T. Active structural control: theory and practice [M]. New York: Wiley, 1990.
- [7] 杜永峰, 李慧. 地震下结构振动最优控制算法模型比较和改进[J]. 世界地震工程, 2005, 21(3): 57~63.
Du Yongfeng, Li Hui. Comparison and improvement of models of optimal control algorithms for dynamic response of structures under earthquakes [J]. World Earthquake Engineering, 2005, 21(3): 57~63. (in Chinese)
- [8] 杜永峰, 李慧, 赵国藩. 地震作用下结构振动最优控制的一种一般算法[J]. 大连理工大学学报, 2004, 44(6): 860~865.
Du Yongfeng, Li Hui, Zhao Guofan. A generalized algorithm for optimal control of structures subjected to seismic excitation [J]. J. Dalian University of Technology, 2004, 44(6): 860~865. (in Chinese)
- [9] 何玉敖, 吴建军. 应用自递归神经网络(SRNN)预测结构响应[J]. 土木工程学报, 1998, 31(2): 46~51.
He Yu'ao, Wu Jianjun. Prediction of structural response using SRNN [J]. J. Civil Engineering, 1998, 31(2): 46~51. (in Chinese)
- [10] Du Yongfeng, Li Hui, Spencer Billie F, Jr. Effect of non-proportional damping on seismic isolation [J]. J. Structural Control, 2002, 9(3): 205~236.
- [11] 杜永峰, 李慧, 吴永诚. 结构地震振动最优控制的目标函数和稳定性[J]. 兰州理工大学学报, 2005, 31(3): 109~113.
Du Yongfeng, Li Hui, Wu Yongcheng. Objective function and stability of optimal control of algorithms for seismic control of structures. [J]. J. Lanzhou University of Technology, 2005, 31(3): 109~113. (in Chinese)
- [12] 杜永峰. 被动与智能隔震结构地震响应分析及控制算法[D]. 大连: 大连理工大学, 2003.
Du Yongfeng. Analysis of seismic response of passive and smart isolated structures and investigation to control algorithms [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2003. (in Chinese)