DOI:10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2007.04.028
第19卷 第4期 甘肃科学学报 Vol.19 No.4
2007年12月 Journal of Gansu Sciences Dec.2007

半刚性连接钢框架的塑性铰法分析

孙玉萍[1],马洪伟[1],王万祯[1],钱学锋[2]
(1.兰州理工大学 土木工程学院,甘肃 兰州 730050;
2.浙江省金华市新时代建筑设计有限公司,浙江 金华 321000)

摘 要: 在众多的钢框架连接模型中,基于较适合结构分析的3参数力学模型,模拟了半刚性连接梁柱节点的弯矩—转角性能.从有限变形理论和虚功原理出发,详细地推导了半刚接梁单元在集中荷载作用下固端弯矩的计算公式与总刚度方程.在此基础上,考虑了半刚接钢框架的几何非线性和连接柔性的影响,利用杆件有限元方法进行实例验证,对刚接框架与半刚接框架的内力进行对比分析,结果表明计算方法可靠,对工程设计具有一定的参考价值.

关键词: 半刚接钢框架;有限元;塑性铰法分析
中图分类号: YU313 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-0366(2007)04-0120-05

Plastic Hinge Analysis of Steel Frame with Semi-rigid Connections

SUN Yu-ping[1], MA Hong-wei[1], WANG Wan-zhen[1], QIAN Xue-feng[2]
(1. *College of Civil Engineering, Lanzhou University of Science and Technology, Lanzhou* 730050, *China*;
2. *Modern Age Building Design Company Limited, Jinhua* 321000, *China*)

Abstract: The moment-rotation relation of beam-to-column semi-rigid connections was simulated with a three-parameter mechanical model which was selected from many mechanical models. The calculation formulas of the fixed end moments, the total stiffness matrix equation and the transmission coefficient of beam elements with semi-rigid connections were presented on the basis of the superposition principle under large displacement, small deformation and the principle of virtual work. Based on these theories, we took into account the effects of the connections and the geometric nonlinearity of the members. By the method of finite element analysis, we analyzed in a comparative way the internal forces of the rigid frame and the semi-rigid frame. The results showed that the proposed methods were reliable and helpful for the engineering personnels.

Key words: steel frame with semi-rigid connections; finite element; plastic hinge analysis

根据梁对柱的约束刚度,钢结构框架体系的节点连接可分为3种形式:刚性连接、半刚性连接和铰接连接.不过,近几十年来的试验结果表明,真正刚接或铰接的框架是不存在的;所有钢框架梁柱连接节点都是半刚性的.所谓半刚接钢框架是梁柱之间有相对转动,连接能承受弯矩,其节点处性能是呈现非线性的.文献[1]列举了常见的几种半刚性连接形式.同时对于半刚性纯钢框架的分析方法也较多,比如Push-Over方法[2].

半刚性连接钢框架,将其假设成刚性连接或铰接的结构进行分析内力,由于其内力与实际受力的状况出入较大,不可能得出满意的结果.而由于半刚性钢框架非线性性能,再加上构件的P-Δ效应的影响,半刚性钢框架也具有荷载与位移、内力的非线性关系,其精确计算很繁琐,并不适用于工程设计.基于这一点,我们在考虑连接柔性影响的基础上,推导了半刚性连接梁单元在任意荷载作用下杆端弯矩计算公式,得出杆单元总刚度方程.

收稿日期: 2006-11-22
基金项目: 甘肃省自然科学基金项目(3ZS051-A25-044)

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

1　梁柱半刚性连接节点的模型

1.1　节点弯矩-转角性能的模拟

梁柱的一般特性可以通过观察杆件的弯矩-转角关系曲线来研究分析，半刚性连接节点从弯矩-转角 (M-θ) 性能模拟可以采用适合结构分析的三参数模型[3].

$$M=\frac{R_{ki}\theta}{[1+(\theta/\theta_0)^n]^{1/n}},\qquad(1)$$

式中 R_{ki} 为初始连接刚度，与连接的类型和几何尺寸有关；θ_0 为连接的参考塑性转角，$\theta_0=M_u/r_{ki}$；M_u 为连接的极限弯矩；n 是 M-θ 为曲线的形状参数，可利用所得试验数据和预测弯矩之间的差异，通过数据拟合的最小二乘法[4,5]得出.

1.2　半刚性连接的初始割线刚度

半刚性连接节点的弯矩-转角 (M-θ) 的关系曲线见图 1，节点的连接刚度可用割线刚度的 $K_s=\frac{M}{\varphi}$ 表示，由于整个加载过程都是非线性的，K_s 是依赖 M 和 φ 的变量.

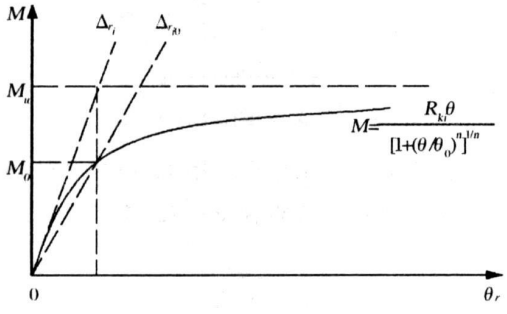

图 1　连接的初始割线刚度

2　局部坐标系下单元刚度矩阵

根据文献[6]可知，单元刚度矩阵可以分解为线性项和非线性项，其中线性项刚度矩阵为 $[K]_0^{(e)}$. 非线性项包括两部分：① 考虑轴力和剪切变形影响的梁单元弹性刚度矩阵 $[K]_{gu}^{(e)}$；② 由轴力引起的附加刚度矩阵 $[K]_{gv}^{(e)}$. 单元刚度矩阵为

$$[K]^{(e)}=[K]_0^{(e)}+[K]_{gu}^{(e)}+[K]_{gv}^{(e)}.\qquad(2)$$

2.1　局部坐标系下一阶刚度矩阵

要考虑连接柔性对框架承载力的影响，通常的做法是对梁的转角位移方程进行修正. 将梁端连接可以模拟成转动弹簧即塑性铰，放在该连接所处的梁单元中考虑，则该梁单元两端转动弹簧所产生的转角为

$$\left.\begin{aligned}\theta_{rA}&=\frac{M_A}{R_{kiA}}\\ \theta_{rB}&=\frac{M_B}{R_{kiB}}\end{aligned}\right\},\qquad(3)$$

式中 R_{kiA}、R_{kiB} 为连接 A 和连接 B 初始刚度.

考虑连接的柔性后，对单元的转角位移方程进行修正后为

$$\left.\begin{aligned}M_A&=\frac{EI}{L}[S_{ii}(\theta_A-\theta_{RA}+S_{ij}(\theta_B-\theta_{RB})]\\ M_B&=\frac{EI}{L}[S_{ji}(\theta_B-\theta_{RB}+S_{jj}(\theta_A-\theta_{RA})]\end{aligned}\right\},\qquad(4)$$

其中 θ_A、θ_B 分别为单元两端的总转角；L 为单元的长度；E 为弹性模量；I 为截面惯性矩；S_{ii}、S_{ij}、S_{jj} 为稳定函数.

由式(4)可以化简为

$$\left.\begin{aligned}M_A&=\frac{EI}{L}(S_{ii}^*\theta_A+S_{ij}^*\theta_B)\\ M_B&=\frac{EI}{L}(S_{ji}^*\theta_A+S_{jj}^*\theta_B)\end{aligned}\right\},\qquad(5)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}S_{ii}^*&=\frac{1}{R}\left(S_{ii}+\frac{S_{ii}^2EI}{LR_{kB}}-\frac{S_{ij}^2EI}{LR_{kB}}\right)\\ S_{jj}^*&=\frac{1}{R}\left(S_{ii}+\frac{S_{ii}^2EI}{LR_{kA}}-\frac{S_{ij}^2EI}{LR_{kA}}\right)\\ S_{ij}^*&=S_{ji}^*=\frac{S_{ij}}{R}\\ R&=\left(1+\frac{S_{ii}EI}{LR_{kiA}}\right)\left(1+\frac{S_{jj}EI}{LR_{kiB}}\right)-\left(\frac{EI}{L}\right)^2\frac{S_{ij}^2}{R_{kA}R_{kB}}\end{aligned}\right\},\qquad(6)$$

在钢框架分析中，框架梁的轴力通常可以忽略，这样便可取 $S_{ii}=S_{jj}=4$；$S_{ij}=S_{ji}=2$.

带半刚性连接的梁单元由图 2 所示，图中梁的杆端力 $P_i(i=1\sim6)$ 与杆端内力 P、M_A 和 M_B 的关系，可以得出考虑连接柔性后的一阶刚度矩阵为

$$[k]_0^{(e)}=\frac{EI}{L}\begin{bmatrix}\frac{A}{I} & 0 & 0 & \frac{A}{I} & 0 & 0\\ & \frac{S_{ii}^*+2S_{ij}^*+S_{jj}^*}{L^2} & \frac{S_{ii}^*+S_{ij}^*}{L} & 0 & \frac{S_{ii}^*+2S_{ij}^*+S_{jj}^*}{L^2} & \frac{S_{ij}^*+S_{jj}^*}{L}\\ & & S_{ii}^* & 0 & \frac{S_{ii}^*+S_{ij}^*}{L} & S_{ij}^*\\ & & & \frac{A}{I} & 0 & 0\\ & sm\,y & & & \frac{S_{ii}^*+2S_{ij}^*+S_{jj}^*}{L^2} & \frac{S_{ij}^*+S_{jj}^*}{L}\\ & & & & & S_{jj}^*\end{bmatrix}\qquad(7)$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

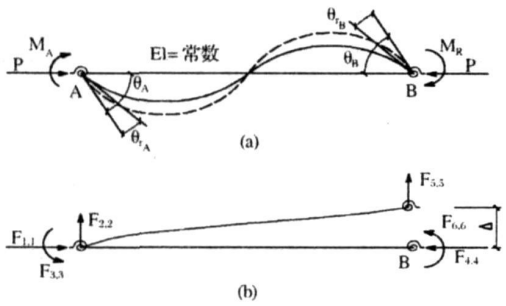

图2 带半刚性连接的梁单元

其中 E 为钢材的弹性模量；L、A 分别为单元长度和横截面面积；I 为单元在框架平面内的抗弯惯性矩；其余符号见图2.

2.2 非线性几何刚度矩阵

根据上述可知，考虑二阶效应的非线性单元刚度矩阵可表示为2个几何刚度矩阵 $[k]_{gu}^{(e)}$ 和 $[k]_{gv}^{(e)}$ 的总和

$$[k]_i = [k]_{gu}^{(e)} + [k]_{gv}^{(e)}. \tag{8}$$

其中

$$[k]_{gu}^{(e)} = \frac{N}{L}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & \frac{12I}{AL^2} & & sym & & \\ 0 & \frac{6I}{AL} & \frac{4I}{L} & & & \\ -1 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & -\frac{12I}{AL^2} & -\frac{6I}{AL} & 0 & \frac{12I}{AL^2} & \\ 0 & \frac{6I}{AL} & \frac{2I}{L} & 0 & -\frac{6I}{AL} & \frac{4I}{L} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$[k]_{gv}^{(e)} = \frac{N}{L}\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & \frac{6}{5} & & sym & & \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

式中 N 为单元轴力，其余符号同前.

3 局部坐标系下的单元刚度方程

首先，采用矩阵位移法[7]的先处理法，在考虑单元的弯曲变形和轴向变形的基础上，得出单元刚度矩阵，从而形成单元在局部坐标下的刚度方程为

$$\{F\}^{(e)} = [k]^{(e)}\{\delta\}^{(e)} + \{\bar{F}_p\}^{(e)}. \tag{11}$$

式中 $\{F\}^{(e)}$ 和 $\{\delta\}^{(e)}$ 分别为局部坐标系下单元的杆端力和位移矢量；$\{\bar{F}_p\}$ 为竖向荷载作用在半刚性梁上引起的固端力矢量

$\{\bar{F}_p\} = \{0 \quad V_A \quad M_A \quad 0 \quad V_B \quad M_B\}$,

式中 M_A、M_B 为半刚性梁的固端弯矩，V_A、V_B 为半刚性梁的固端剪力.

4 半刚性梁固端弯矩的推导

均布荷载作用下的半刚性梁单元如图3所示.

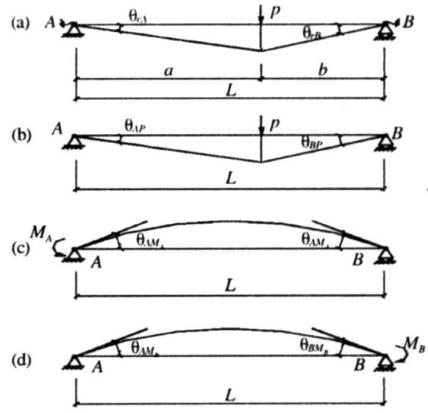

图3 均布荷载作用下的半刚性梁单元

图3(a)在集中荷载 P 作用下，根据文献[8]可得半刚接梁的固端弯矩为 M_A 和 M_B，则由式(3)可得

$$\left.\begin{aligned} M_A &= r_{kA}\theta_{kA} \\ M_B &= r_{kB}\theta_{kB} \end{aligned}\right\}, \tag{12}$$

经过简化后得到梁 A、B 端的杆端弯矩为

$$\left.\begin{aligned} M_A &= \frac{-ql^2(6\mu_B+1)}{12(4\mu_B+12\mu_A\mu_B+4\mu_A+1)} \\ M_B &= \frac{ql^2(6\mu_A+1)}{12(4\mu_B+12\mu_A\mu_B+4\mu_A+1)} \end{aligned}\right\}, \tag{13}$$

式中 μ_A、μ_B 为梁单元的相对线刚度与半刚性连接割线刚度的比值，即 $\mu_A = i_b/r_{kA}$，$\mu_B = i_b/r_{kB}$.

据上述方法计算，可求出半刚性梁单元在常用荷载作用下的杆端弯矩表达式.通过比较，半刚性连接梁单元杆端弯矩的计算公式可整理成通用式

$$\left.\begin{aligned} M_A &= \frac{M_{FA}(4\mu_B+1)-2M_{FB}\mu_B}{4\mu_B+12\mu_A\mu_B+4\mu_A+1} \\ M_B &= \frac{M_{FB}(4\mu_A+1)-2M_{FA}\mu_A}{4\mu_B+12\mu_A\mu_B+4\mu_A+1} \end{aligned}\right\}, \tag{14}$$

式中：M_{FA}、M_{FB} 分别为相同荷载下，同尺寸刚性连接梁的 A 端和 B 端的固端弯矩.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

总刚度方程通过单元坐标转换矩阵将局部坐标系下的单元刚度矩阵按下式转换成整体坐标系下的刚度矩阵

$$[k]^{(e)} = [T]^T [k]^{(e)} [T], \tag{15}$$

式中 $[T]$为坐标转换矩阵

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

将整体坐标系下的单元刚度矩阵集成总刚度矩阵，再引入边界约束条件和荷载信息，得到总刚度方程为

$$\{F\} = [K]\{\Delta\}. \tag{17}$$

5　算例

一个单跨双层的半刚接钢框架，节点以及单元的编码，荷载见图 4. 柱采用 HM250×250，梁采用 HN300×150，具体尺寸见图 4. 梁柱连接采用顶底角钢的形式. 可取 $n = 0.072$，初始刚度 $R_{in} = 1.08 \times 10^9\ N \cdot mm/rad$. 通过分析程序模拟，可得刚性框架与半刚性的位移、内力分别示于表 1、2、3.

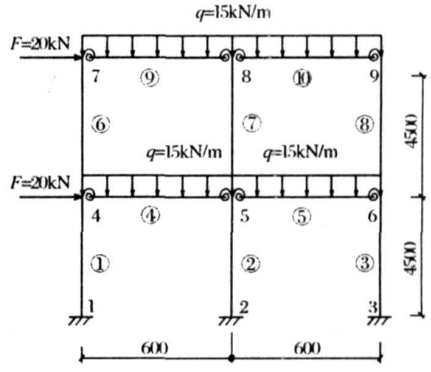

图 4　单层双跨半刚接钢框架

表 1　刚架框架与半刚接框架的节点位移比较

节点号	刚接框架			半刚接框架		
	水平位移 /mm	竖向位移 /mm	节点转角 /rad	水平位移 /mm	竖向位移 /mm	节点转角 /rad
4	14.8503	0.2101	0.0088	14.8801	0.2074	0.0089
5	14.5977	0.5362	0.0016	14.6285	0.5299	0.0017
6	14.4306	0.2426	−0.0031	14.4624	0.2401	−0.0029
7	28.6304	0.6425	0.0045	28.1576	0.6378	0.0076
8	28.2486	0.7264	0.0025	28.1848	0.8912	0.0026
9	28.1659	0.9015	0.0032	28.6425	0.4245	0.0034

表 2　刚接框架的杆端力

单元号	始端			终端		
	轴力 /kN	剪力 /kN	弯矩 /kN·m	轴力 /kN	剪力 /kN	弯矩 /kN·m
1	36.4020	3.8844	19.9057	−36.4020	−3.8844	−2.4333
2	91.0050	−8.0054	−15.8823	−91.0050	−8.0054	−20.1493
3	36.4020	−15.8824	−39.6295	−36.4020	15.8824	−31.8485
4	8.3971	−38.2275	−20.0190	−28.3971	−51.7725	60.6858
5	18.9314	−45.8385	−44.4192	−18.9314	−44.1615	39.3840
6	34.4893	3.7568	18.1562	−34.4893	−3.7568	−4.4726
7	87.2358	−7.0244	−13.8641	−87.2358	−7.0244	−18.6477
8	35.9811	−15.4587	−39.1542	35.9811	15.4587	−39.4725
9	9.4872	−39.1471	−21.5746	−27.1644	−54.1473	−34.5842
10	19.5426	−45.2556	−46.1025	−19.5426	−44.6872	38.1450

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

表3 半刚接框架的杆端力

单元号	始端			终端		
	轴力/kN	剪力/kN	弯矩/kN·m	轴力/kN	剪力/kN	弯矩/kN·m
1	37.7489	3.8096	19.7260	−37.7489	−3.8096	−2.5901
2	96.4387	−8.0866	−16.1101	−96.4387	8.0866	−20.2870
3	43.6915	−15.7230	−31.6443	−43.6915	15.7230	−39.1165
4	3.8149	−37.7489	−19.7260	−23.8149	−51.1865	59.9374
5	15.7225	−45.2200	−43.8273	−15.7226	−43.6832	39.1165
6	36.9429	3.7251	19.5484	−36.9429	−3.7251	−2.4982
7	95.0455	−7.9825	−15.7514	95.0455	−7.9825	−19.8613
8	44.0346	−15.5342	−30.7581	44.0346	−15.5342	−40.4721
9	3.6124	−35.4721	−18.5721	−22.4572	−50.1546	58.6945
10	14.9644	−44.8721	−42.8425	−14.9457	−42.4581	38.1416

由表1～表3中可比较得出：①在几何非线性和梁柱连接柔性的影响下，半刚接框架的侧移比刚接框架大，随着层数的增加，侧移也相应增加；②梁柱的轴力均有变化，柱的变化幅度比梁小；③梁柱的剪力变化相对来说比较小；④对于弯矩，与刚接钢框架相比，半刚接框架的梁端弯矩减小较多，相应的梁跨中弯矩则增大，柱弯矩变化则无明显的规律.

6 结语

(1) 梁柱的轴力均有变化，柱的变化幅度比梁小；梁柱的剪力变化很小；半刚接框架的梁端弯矩将减小，相应的梁跨中弯矩增大.

(2) 考虑连接柔性以及几何非线性的影响，所得出的半刚性钢框架梁柱单元刚度矩阵以及将局部坐标系下的单元刚度矩阵转换成整体坐标系下的刚度矩阵，在理论上具有一定的指导意义.

(3)工程在设计时，考虑钢结构框架连接的半刚性，需要注意梁的轴力变化以及梁柱的弯矩影响. 进一步的理论需要更多的数据来支撑，以待探讨.

参考文献：

[1] 陈绍蕃，顾强. 钢结构基础[M]. 北京：中国建筑工业出版社，2003，261-262.

[2] 王秀丽，陈祥勇，秦雪映，等. 基于Push－Over方法的纯钢框架弹塑性分析[J]. 甘肃科学学报，2006，18(3)：101-107.

[3] 陈惠发. 钢框架稳定设计[M]. 周绥平. 上海：世界图书出版公司，1999. 264-361.

[4] 丁丽娟. 数值计算方法[M]. 北京：北京理工大学出版社，1997. 128-133.

[5] 吴彦良，尤传华，洪专，等. 一类矩阵反问题的最小二乘解[J]. 甘肃科学学报. 2006，18(3)：6-9.

[6] 李国强. 多高层建筑钢结构设计[M]. 北京：中国建筑工业出版社. 2004. 94-137.

[7] 龙驭球，包世华. 结构力学(下)[M]. 北京：高等教育出版社 1996. 94-107.

[8] 龙驭球，包世华. 结构力学(上)[M]. 北京：高等教育出社. 1996. 356-427.

作者简介：

孙玉萍，(1963-)女，甘肃省兰州人，1995年同济大学结构工程专业硕士毕业，现任兰州理工大学土木工程学院副教授，硕士生导师，主要研究方向为钢框架半刚性.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net