

# 时变反应扩散系统中螺旋波和湍流的控制<sup>\*</sup>

马 军<sup>1)†</sup> 靳伍银<sup>2)</sup> 易 鸣<sup>3)</sup> 李延龙<sup>1)</sup>

1)(兰州理工大学物理系,兰州 730050)

2)(兰州理工大学机电学院,兰州 730050)

3)(华中师范大学物理系,武汉 430079)

(2007 年 8 月 28 日收到;2007 年 10 月 16 日收到修改稿)

研究了一类参数时变的反应扩散系统中螺旋波和湍流对外电场的响应问题.在数值模拟中,以一类改进的 Fitzhugh-Nagumo 模型为研究对象(在恰当参数值下可分别描述激发介质和振荡介质),考虑随机和不确定因素(如内外噪声、气压、温度梯度分布和介质形变等)所引起的系统参数涨落对斑图演化的影响,在模拟中选取的参数涨落范围确保系统可以观测到稳定旋转的螺旋波、漫游的螺旋波和湍流,经历一定的暂态过程后,对介质施加极化电场,研究螺旋波和湍流在外电场中的演化.数值计算结果表明:在系统参数发生涨落和外电场强度比较小情况下,主要观测到螺旋波的破裂;而在系统参数发生涨落和外电场强度比较大时,螺旋波先发生破裂,最终在外电场作用下,系统达到稳定均匀态.基于系统快变量的瞬时状态闪图来描述参数涨落和外电场作用下斑图的演化问题,并进行了对应的理论分析.

**关键词:** 螺旋波, 湍流, 时变系统, Fitzhugh-Nagumo 模型

**PACC:** 0545, 8730C, 0565, 8220M

## 1. 引 言

激发介质和振荡介质广泛存在于自然界,在介质内部存在着一定的自耦合作用,通常采用耦合映像格子或者反应扩散方程等来描述其动力学或相关特性<sup>[1-7]</sup>.研究发现:在激发和振荡介质中都可以观测到螺旋波,通常采用 Complex Ginzburg-Landau 方程<sup>[8-10]</sup>来描述振荡介质的部分统计特性、而改进的 Oregon 方程<sup>[11,12]</sup>、Fitzhugh-Nagumo<sup>[13,14]</sup>及其改进模型等<sup>[15-17]</sup>在特定的参数区域可用来描述激发介质的相关特性.

在螺旋波中,螺旋波顶点邻域的波前曲线具有较大的曲率,因此运动较慢,其他各处的传播速度均随曲率减小而增大,因而螺旋波的波前曲线卷曲成螺旋状.一般地,行波表现为平行的波前和波后完全一致地传播,而螺旋波的波前和波后在顶点处融为一体,形成具有奇异性结构的螺旋波顶点,为一类拓扑缺陷<sup>[6,7]</sup>.近年来的心脏实验研究表明:心动过速及心颤致死与螺旋波的自组织及螺旋波破裂有密切

的关系.正常的心脏由一个窦房结控制,该讯号发生源产生的行波断开后产生螺旋波,对应于心率过速;螺旋波失稳至螺旋波湍流态,系统开始进入时空混沌,对应于心颤,而心颤致死的过程与螺旋波的失稳有密切的关系,因此,研究如何消除心脏中的螺旋波肌电信号是一个非常有意义的问题.近年来的相关研究主要借助于动物心脏实验、Belousov-Zhabotinsky (BZ)<sup>[18-20]</sup>反应和数值模拟等手段,但这里面还有许多因素需要考虑.如:1)目前所研究的各类模型一般假定系统的参数是稳定不变化的,而实际上由于内外界的随机因素如内外噪声、温度和气压分布、介质的形变等可能引起系统的参数结构发生变化;如 CO 在 Pt(110)表面的催化氧化反应中,晶体表面的温度分布、CO 和氧气的气压对应模型的可调参数,而实际上这些因素可以受到外界的影响而发生改变,进而影响模型的参数结构<sup>[4]</sup>;对于化学反应系统,如描述光敏介质的 BZ 反应,背景光照强度则直接影响溴化物的量,这也将影响系统的反应过程;对于心肌系统,心肌的不规律收缩(介质的不规律形变)则也影响心肌组织中电活动和信号的传播,因此

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号:10747005, 10572056, 30670529)资助的课题.

在理论研究中考虑参数随时间变化对系统斑图演化的影响以及对外界控制效果的影响是非常有趣的. 2) 从控制的角度讲, 要考虑控制的代价和可行性. 而对系统进行控制之前必须对系统的信息要足够清楚. 如对系统采用周期信号刺激, 从随机共振的角度看, 采用和系统行波本征频率最接近的周期信号效果比较显著, 但系统的本征频率与系统的内在参数有特定的关联, 如果不清楚系统的参数结构和特征, 也就不容易获得系统行波的本征频率等重要参数. 即使从实验上测定螺旋波的旋转频率也需要一定的暂态过程, 这对于参数瞬时变化的系统可能是无效的. 因此, 对于参数随时间变化或者发生涨落的系统, 及时对系统信息实现动态识别和控制非常重要. 3) 对于激发介质、亚激发介质和振荡介质来说, 不同的参数区域对应不同的统计特性, 相同的模型, 在一定的参数区域可以用来描述激发介质, 而在其他参数区域就可以描述振荡介质<sup>[61]</sup>, 系统的非均匀性<sup>[21]</sup>和临界区域参数的涨落可以导致不同斑图(螺旋波(outwardly rotating spiral wave)、反螺旋波(inwardly rotating spiral wave)、靶波、多臂螺旋波)之间发生转化<sup>[22-28]</sup>. 因此, 在对这些斑图进行抑制的时候要考虑参数涨落引起的效应.

预防螺旋波的出现、失稳破裂、螺旋波与其他斑图的转化以及螺旋波在外电场的极化等研究引起了各方面的关注. 在耦合振子<sup>[29-32]</sup>、细胞钙离子<sup>[33]</sup>、心肌组织和化学反应中都可以观测到螺旋波, 螺旋波的破裂主要表现为多普勒(Doppler)失稳和艾克豪斯(Eckhaus)失稳, Fenton 和 Yang 等对螺旋波的失稳机理进行了比较细致地研究<sup>[34, 35]</sup>. 在螺旋波的控制方面, 反馈和延迟反馈方法在实验和理论上被用来抑制螺旋波<sup>[36-40]</sup>, Alonso 等提出采用参数扰动来消除缺陷湍流和螺旋波<sup>[41-44]</sup>, Zhang 等提出采用周期信号刺激来抑制时空混沌或螺旋波<sup>[45-48]</sup>, 我们进一步提出采用非连续局部电击方法和采用混沌信号驱动、随机相位驱动和旋转中心力场等方法来抑制螺旋波和时空混沌<sup>[49-53]</sup>. 螺旋波是一种行波, 因此, Wang 等建议采用行波的方法来消除心肌组织中的有害螺旋波, 并给出了实验方案<sup>[54]</sup>. 螺旋波的破裂机理研究以及预防螺旋波的研究也是一个非常有趣内容, 如一定强度的噪声和不同边界条件可引起的螺旋波的破裂<sup>[55-58]</sup>. 螺旋波、湍流之间的同步<sup>[59-61]</sup>、手征对螺旋波结构影响<sup>[62]</sup>、螺旋波的波头动力学研究等也引起了广泛的关注. 螺旋波的波头是一类拓扑缺陷, 在理论研究中常通过追踪波头

(local zero)的轨迹来分析其相关特性<sup>[63-67]</sup>. 当外电场施加到介质上, 介质发生一定程度的极化, 介质中的螺旋波则发生漂移<sup>[68, 69]</sup>. 这里我们将主要研究参数涨落的系统对外加电场的响应, 内容包括: 以一类反应扩散系统(不同参数区域可分别描述激发和振荡介质)为研究对象, 选择恰当的初始值和参数区域, 使系统产生稳定旋转的螺旋波、漫游的螺旋波和螺旋波湍流、反螺旋波; 分别考虑参数周期性和随机涨落对斑图演化的影响; 施加稳定的外电场, 研究参数涨落系统中斑图在外加电场中的演化. 由于我们主要侧重于观察斑图(稳定旋转的螺旋波、漫游漂移的螺旋波和湍流)在参数涨落和外加电场下的演化, 因此, 我们将借助于常规的快变量的瞬时状态闪图(snapshots)的灰度来描述不同时刻下系统稳定斑图的特征. 已有的结果表明: 在参数固定不变化的情况下, 即使微弱的外电场也可以引起螺旋波的漂移, 而在系统参数发生涨落下, 这将是一个复杂的问题, 这是我们这里研究的主要内容.

## 2. 参数涨落的反应扩散系统中的螺旋波在外电场中的演化

复数金兹郎道方程常被用来描述振荡介质中的行波行为, 采用文献[70-72]的方法, 可以从描述时空系统的反应扩散方程得到复数金兹郎道方程. 为了同时研究激发和振荡介质中由于参数涨落和外电场引起的斑图转换问题, 这里以一类 Fitzhugh-Nagumo 方程为模型, 首先研究介质在参数涨落下对外电场的响应. 改进的 Fitzhugh-Nagumo 方程可以表述为

$$\begin{aligned} \partial_t u &= -\frac{1}{\epsilon} u(u-1) \left( u - \frac{v+b}{a} \right) + \Delta^2 u; \\ \partial_t v &= f(u) - v, \end{aligned} \quad (1)$$

这里选择分段连续函数  $f(u)=0$ , 当  $u < 1/3$ ;  $f(u)=1-6.75u(u-1)^2$  当  $1/3 \leq u \leq 1$ ;  $f(u)=1$  当  $u > 1$ . (1) 式中  $a, b, \epsilon$  为参数, 参数  $\epsilon$  的大小决定着介质的可激发性<sup>[73]</sup>, 且(1)式与描述 CO 在 Pt(110) 表面的催化氧化反应方程有相似性<sup>[4]</sup>. 在  $a < b+1$  和  $0 < \epsilon \ll 1$  时, 选择  $b > 0$  和  $b < 0$  可用(1)式分别描述振荡和激发介质的行波特性<sup>[6, 56, 74]</sup>. 研究发现,  $a=0.84$ ,  $b=0.07$ ,  $0 < \epsilon \leq 0.06$  选择恰当的初始值则系统可以出现稳定旋转的螺旋波; 进一步增加  $\epsilon$  则系统出现漫游的螺旋波; 当  $\epsilon > 0.07$  则系统出现湍流. 在数值计算中, 选取系统格点数为  $256 \times 256$ , 格点之间的间距  $\Delta x = \Delta y = 100/256$ , 时间步长  $h =$

0.02, 参数  $a=0.84$ , 采用无流边界条件和欧拉差分法. 这里分别选择参数  $b>0$  和  $b<0$ , 研究参数  $\epsilon$  发生涨落下螺旋波和湍流的转化和对外电场的响应.

施加外电场的参数涨落系统可以表述为

$$\partial_t u = -\frac{1}{\epsilon_0 + \epsilon(t)} u(u-1) \left[ u - \frac{v+b}{a} \right] + E_x \frac{\partial u}{\partial x} + E_y \frac{\partial u}{\partial y} + \Delta^2 u;$$

$$\partial_t v = f(u) - v, \tag{2}$$

其中  $f(u)$  表达式如前, 这里  $E_x$  和  $E_y$  为外界电场强度,  $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon(t)$ , 选取参数  $\epsilon_0 = 0.044$ ,  $\epsilon(t)$  是参数涨落的大小, 在数值计算中选择恰当的  $\epsilon(t)$  确保系统可以出现稳定旋转的螺旋波, 漫游的螺旋波和湍流. 图 1 分别给出系统 (1) 在不同  $\epsilon$  值下快变量  $u$  的闪图.

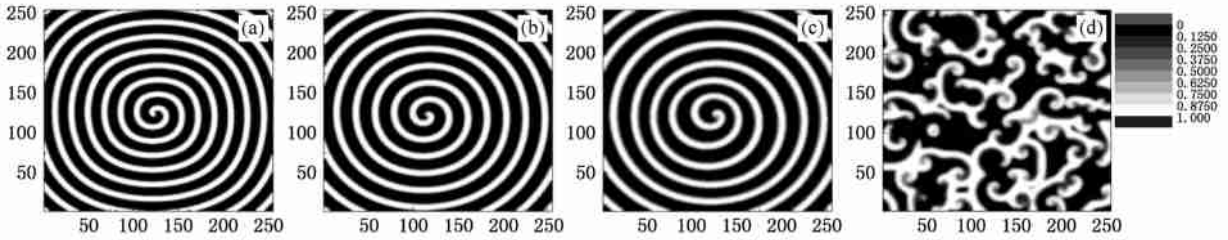


图 1 参数  $a=0.84$ ,  $b=0.07$ , 不同参数  $\epsilon$  下产生的稳定旋转的螺旋波  $\epsilon=0.02$  (a),  $\epsilon=0.04$  (b); 漫游的螺旋波  $\epsilon=0.064$  (c); 湍流  $\epsilon=0.074$  (d) (快变量  $u$  的闪图采用灰度表示)

下面我们先研究参数  $b>0$  且满足  $a<b+1$  时不同的参数  $\epsilon$  对系统斑图成型的影响以及施加外极化电场后斑图的演化问题. 分为四个步骤: 第一阶段, 先产生稳定旋转的螺旋波作为初始值, 第二阶段, 参数发生涨落无外界电场下斑图的演化, 第三, 沿  $x$  轴方向施加一均匀电场 (同时考虑不同电场强度的影响), 第四, 在  $y$  轴方向施加另外一个均匀电场 ( $x, y$  轴电场方向强度可相同), 记录某个时刻的快变量闪图 (灰度图), 观测暂态过程中斑图转化, 漂移以及系统是否能达到稳定均匀态, 数值计算结果见图 2 到图 8.

图 2 和图 3 的数值计算结果表明: 在参数发生周期性涨落的 600 个时间单位内, 螺旋波发生破裂并开始进入湍流态 (螺旋波与湍流共存), 原因可能在于: 无外电场时, 恰当的周期性参数涨落使稳定旋转的螺旋波开始扭曲, 在参数过渡到螺旋波漫游区域之前, 螺旋波已经发生了破裂, 破裂的螺旋波在参数涨落过程中进一步发生相互碰撞, 而整个介质是均匀的, 激发的螺旋波在相同步调参数变化下自然具有相同的旋转频率, 这就可能导致多个同频率螺旋波的共存. 在  $t>600$  时间单位后单向外电场 (沿  $x$  轴方向) 开始施加在介质上, 湍流逐步被抑制, 外

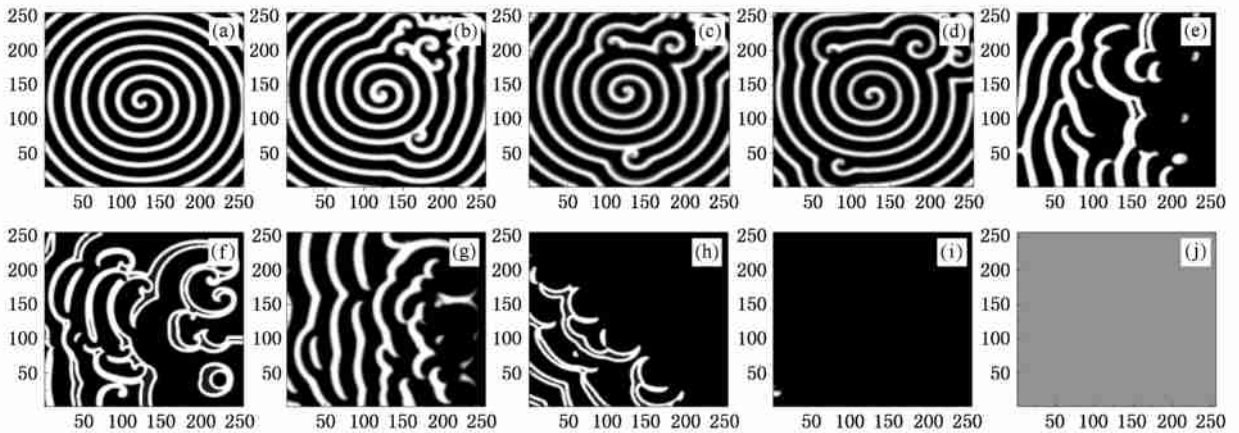


图 2 参数涨落下螺旋波和湍流在外场中的演化,  $a=0.84$ ,  $b=0.07$ ,  $\epsilon=0.044+0.03\cos t$ , 以稳定旋转的螺旋波作为初始值  $t=0$  (a);  $t=200$ (b),  $400$ (c),  $600$  时间单位(d) 无外场下参数涨落导致的螺旋波的演化; 外场强度  $E_x=2$ ,  $E_y=0$ ,  $t=640$ (e),  $680$ (f),  $720$  时间单位(g); 外场强度  $E_x=2$ ,  $E_y=2$ ,  $t=760$ (h),  $800$ (i),  $840$ (j) 时间单位 (快变量  $u$  采用灰度表示)

加电场的强度决定着系统达到稳定均匀态的暂态过程, 强度大的外场则需要较小的暂态过程. 在大约  $t > 720$  时间单位时, 在  $y$  轴方向同时施加等强度的外电场, 则也可以消除系统的螺旋波和湍流, 系统最

终达到稳定均匀态.

下面我们研究参数涨落周期为其他值情况下螺旋波的演化问题.

图4和图5的结果表明: 参数涨落周期相同时,

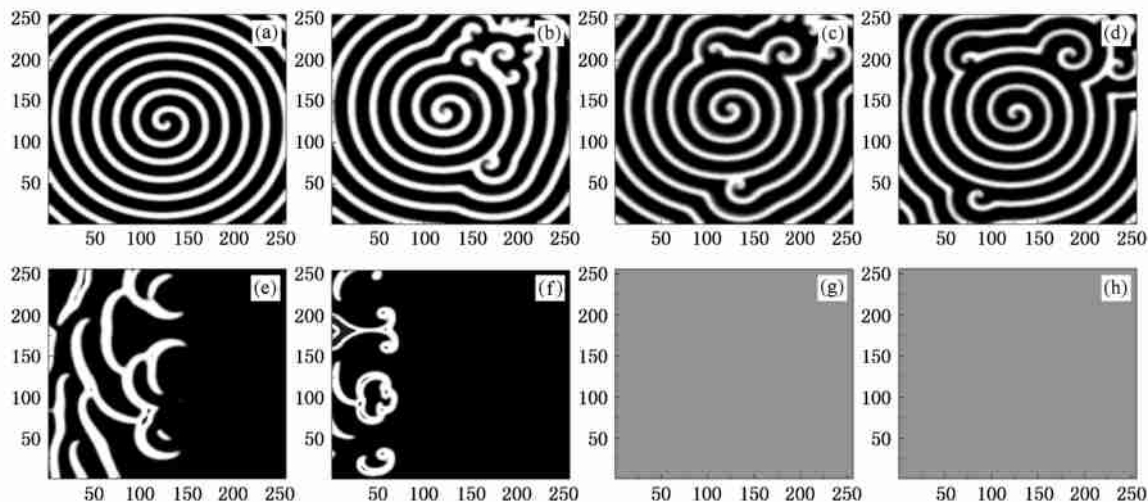


图3 参数涨落下螺旋波和湍流在外场中的演化,  $a=0.84$ ,  $b=0.07$ ,  $\epsilon=0.044+0.03\cos t$ , 以稳定旋转的螺旋波作为初始值  $t=0$  (a);  $t=200$ (b), 400(c), 600 时间单位(d)无外场下参数涨落导致的螺旋波的演化; 外场强度  $E_x=2.5$ ,  $E_y=0$ ,  $t=640$ (e), 680(f), 720 时间单位(g); 外场强度  $E_x=2.5$ ,  $E_y=2.5$ ,  $t=760$ (h) 时间单位(快变量  $u$  采用灰度表示)

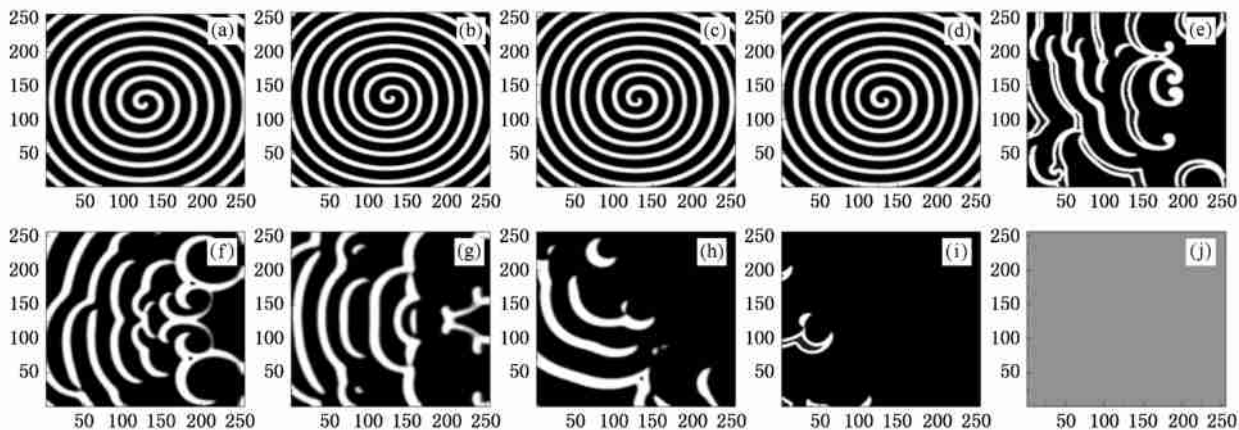


图4 参数涨落下螺旋波和湍流在外场中的演化,  $a=0.84$ ,  $b=0.07$ ,  $\epsilon=0.044+0.03\cos 0.5t$ , 以稳定旋转的螺旋波作为初始值  $t=0$ (a);  $t=200$ (b), 400(c), 600 时间单位(d)无外场下参数涨落导致的螺旋波的演化; 外场强度  $E_x=2$ ,  $E_y=0$ ,  $t=640$ (e), 680(f), 720 时间单位(g); 外场强度  $E_x=2$ ,  $E_y=2$ ,  $t=760$ (h), 800(i), 840(j) 时间单位(快变量  $u$  采用灰度表示)

比较强的外电场相对需要比较小的暂态过程来使系统螺旋波经破裂而进入稳定均匀态. 图5和图6的数值计算结果表明: 相同的外场强度下, 参数涨落的周期比较小时相对需要比较短的暂态过程. 我们进一步也测试了其他涨落周期, 选择恰当的外场, 都可以使螺旋波和湍流都可以被消除掉, 系统最终达到稳定均匀态.

下面我们考虑当参数涨落是随机函数情况, 即参数涨落幅度  $\epsilon(t)$  介于  $[-\Phi(t), \Phi(t)]$ , 其中  $\Phi(t)$  为大于等于0且小于等于1的随机数, 在数值模拟中可从计算机语言中内在的随机函数产生.

图7和图8的数值计算结果表明: 即使系统参数以随机函数形式发生涨落, 选择恰当的外加电场仍然可以消除螺旋波(稳定旋转的螺旋波和漫游的

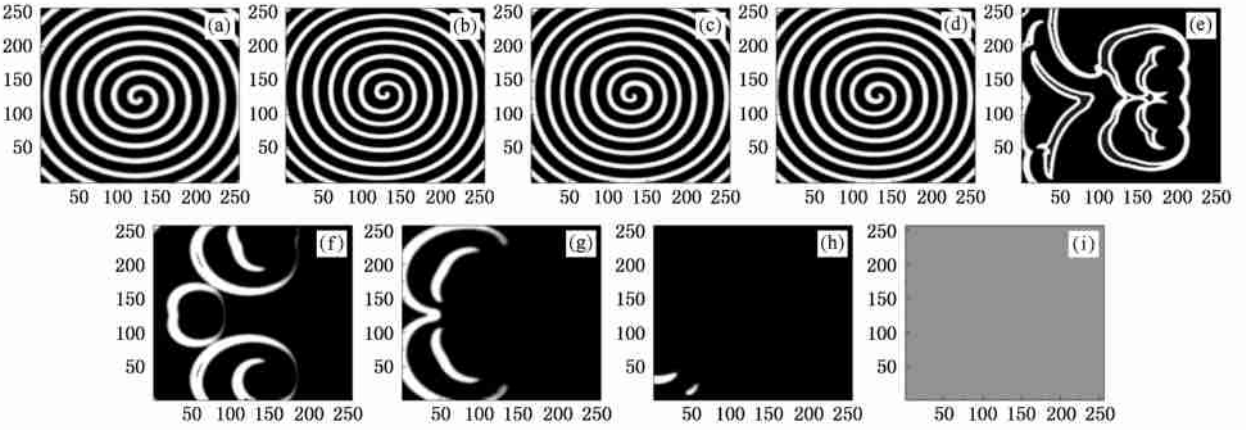


图 5 参数涨落下螺旋波和湍流在外场中的演化,  $a=0.84$ ,  $b=0.07$ ,  $\epsilon=0.044+0.03\cos 0.5t$ , 以稳定旋转的螺旋波作为初始值  $t=0$ (a);  $t=200$ (b), 400(c), 600 时间单位(d)无外场下参数涨落导致的螺旋波的演化; 外场强度  $E_x=2.2$ ,  $E_y=0$ ,  $t=640$ (e), 680(f), 720 时间单位(g); 外场强度  $E_x=2.2$ ,  $E_y=2.2$ ,  $t=760$ (h), 800(i) 时间单位 (快变量  $u$  采用灰度表示)

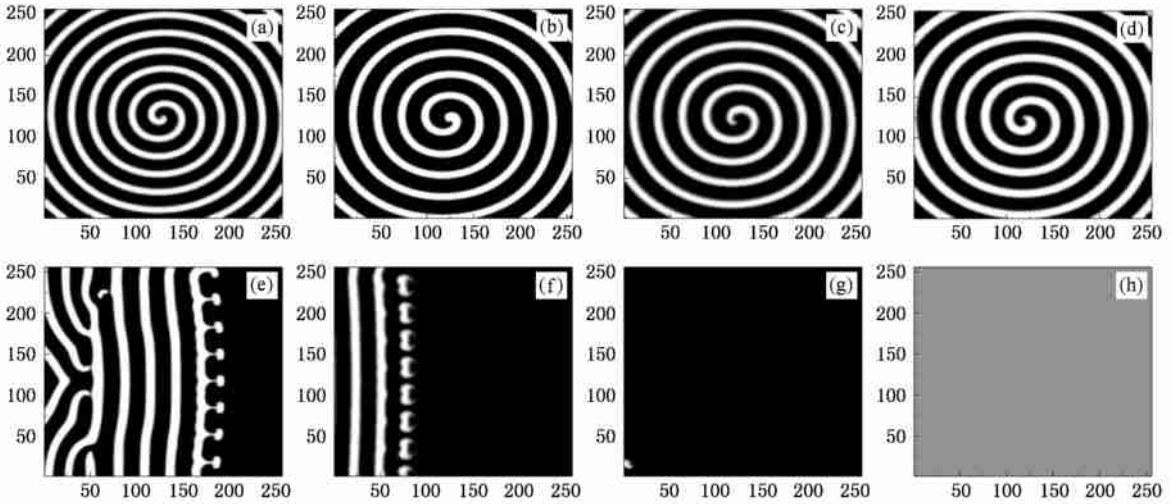


图 6 参数涨落下螺旋波和湍流在外场中的演化,  $a=0.84$ ,  $b=0.07$ ,  $\epsilon=0.044+0.03\cos 2t$ , 以稳定旋转的螺旋波作为初始值  $t=0$  (a);  $t=200$ (b), 400(c), 600 时间单位(d)无外场下参数涨落导致的螺旋波的演化; 外场强度  $E_x=2.2$ ,  $E_y=0$ ,  $t=640$ (e), 680(f), 720 时间单位(g); 外场强度  $E_x=2.2$ ,  $E_y=2.2$ ,  $t=760$ (h) 时间单位 (快变量  $u$  采用灰度表示)

螺旋波)以及演化产生的湍流.

对比图 2, 3 和图 4 到 8, 我们可以看到, 在无外电场下, 不同的参数涨落规律可能导致多个螺旋波共存, 也可以使螺旋波不发生显著变化, 原因在于, 图 2 和图 3 选取参数涨落的周期和角频率 ( $\omega=1$ ) 是接近稳定旋转螺旋波的本征频率, 螺旋波旋转频率的近似计算公式<sup>[75, 76]</sup>如下:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{0.69\mu}{\epsilon^{1/3}} - \frac{0.926}{a}; \quad (3)$$

$$\mu \approx 2.7 \left[ \frac{v^s(1-v^s)}{a} \right]^{2/3};$$

$$v^s = a/2 - b.$$

这里各个参数含义和(2)式一致, 可以计算出当参数  $a=0.84$ ,  $b=0.07$ ,  $\epsilon=0.044$  时螺旋波的近似本征旋转角频率为  $\omega \approx 1.1$ . 显然图 2 和图 3 情况下系统参数涨落的周期和螺旋波旋转的本征频率最接近, 共振效应更能引起螺旋波对参数变化的响应而发生进一步的演化; 而图 4 到图 8 的结果是因为系统参数涨落的周期偏离了螺旋波旋转的本征频率, 很难引发共振效应, 因此螺旋波相对比较稳定.

以上我们讨论了系统处于激发态情况下参数发生涨落时系统螺旋波和湍流在外场中的演化问题, 研究表明: 在恰当的外场强度下, 无论是单向外

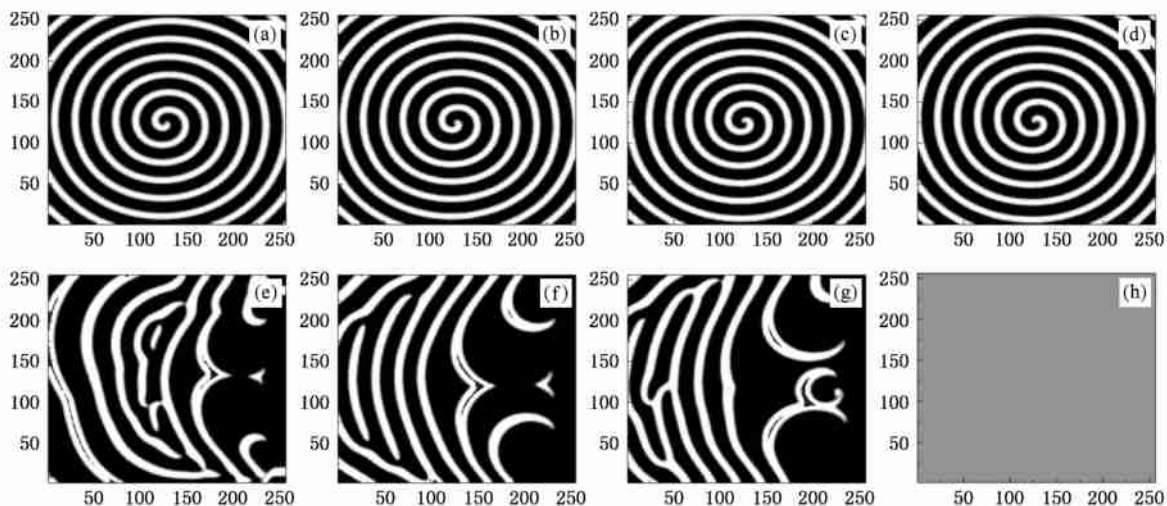


图 7 参数涨落下螺旋波和湍流在外场中的演化,  $a=0.84$ ,  $b=0.07$ ,  $\epsilon=0.044+[-0.025, 0.025]$ , 表示介于以  $-0.025$  到  $0.025$  之间的随机数, 稳定旋转的螺旋波作为初始值  $t=0$ (a);  $t=200$ (b),  $400$ (c),  $600$  时间单位(d) 无外场下参数涨落导致的螺旋波的演化; 外场强度  $E_x=2.2$ ,  $E_y=0$ ,  $t=640$ (e),  $680$ (f),  $720$  时间单位(g); 外场强度  $E_x=2.2$ ,  $E_y=2.2$ ,  $t=760$ (h) 时间单位 (快变量  $u$  采用灰度表示)

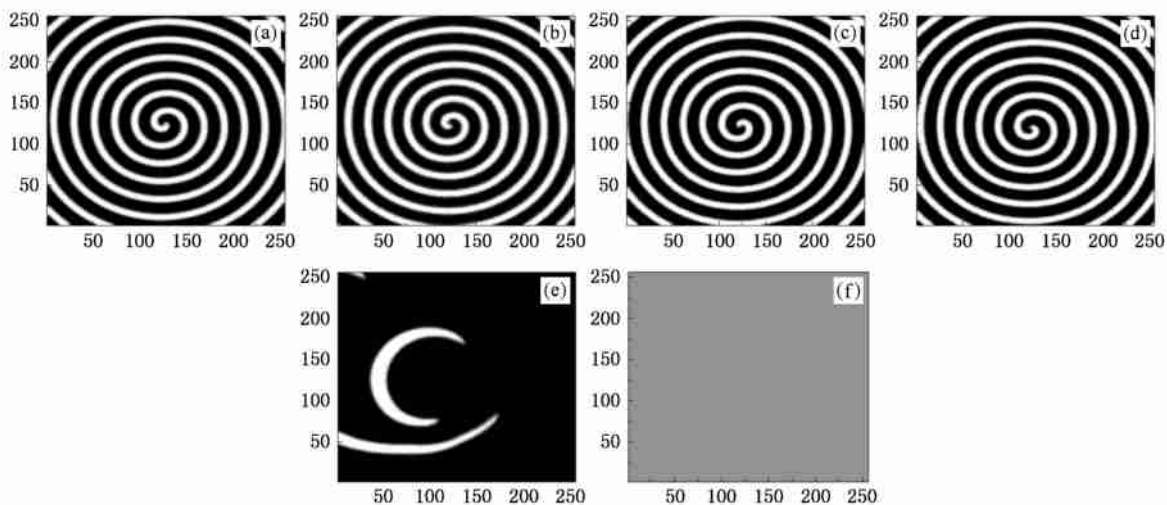


图 8 参数涨落下螺旋波和湍流在外场中的演化,  $a=0.84$ ,  $b=0.07$ ,  $\epsilon=0.044+[-0.03, 0.03]$ , 表示介于以  $-0.03$  到  $0.03$  之间的随机数, 稳定旋转的螺旋波作为初始值  $t=0$ (a);  $t=200$ (b),  $400$ (c),  $600$  时间单位(d) 无外场下参数涨落导致的螺旋波的演化; 外场强度  $E_x=2.4$ ,  $E_y=0$ ,  $t=640$ (e),  $680$ (f),  $720$  时间单位(g); 外场强度  $E_x=2.4$ ,  $E_y=2.4$ ,  $t=760$ (h) 时间单位(快变量  $u$  采用灰度表示)

电场(沿  $x$  轴方向或者沿  $y$  轴方向)还是交叉的外电场(沿  $x$  轴和沿  $y$  轴方向), 都可以消除系统演化过程中出现的稳定旋转的螺旋波、漫游的螺旋波和湍流. 在数值计算中, 选取  $0 < \epsilon = 0.044 + \epsilon(t) < 0.074$  使系统可以出现螺旋波、漫游的螺旋波和湍流. 在激发状态下, 整个系统的参数  $\epsilon$  涨落实际上改变了系统的可激发程度, 不同的涨落节奏和规律导致螺旋波在传播中的扭曲, 进一步使螺旋波发生局部破裂

和碰撞, 从而引发更剧烈的失稳. 当外电场开始作用后, 破裂的螺旋波和湍流开始在外电场驱动下朝系统边界移动, 在与边界发生碰撞后而消失, 最后使系统达到稳定均匀态. 当系统参数稳定时, 稳定旋转的螺旋波在微弱的电场下也可以发生漂移; 而在系统参数发生涨落时, 螺旋波一般会发生破裂而进入湍流态, 这时虽然波尖在外电场作用下发生漂移, 但在所有波尖漂移过程中由于临近波尖的碰撞而产生新

的波头. 因此, 在参数涨落下, 很难观测到单个螺旋波在外界弱电场中的漂移, 这是因为螺旋波很快发生了失稳而进入湍流态.

下面我们研究当系统处于非激发态, 即当系统

满足  $a < b + 1, 0 < \epsilon \ll 1$  和  $b < 0$  时参数涨落下螺旋波湍流在外场中的演化问题. 在图 9, 图 10 和图 11 中分别讨论了参数  $a = 0.84, b = -0.01$ , 参数涨落  $\epsilon(t)$  中选取不同值下斑图的演化问题.

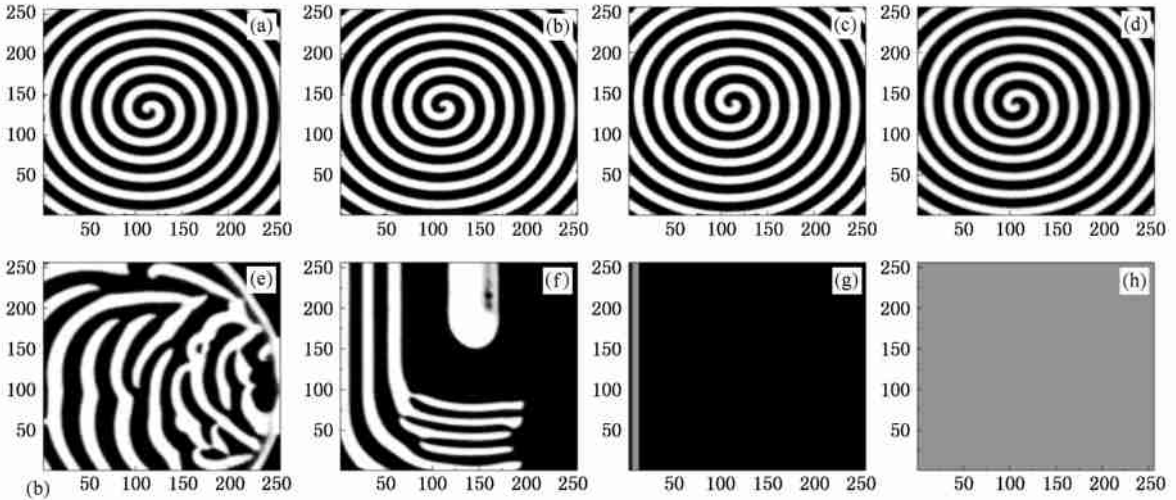


图 9 参数涨落下螺旋波和湍流在外场中的演化,  $a = 0.84, b = -0.01, \epsilon = 0.044 + [-0.03, 0.03]$ , 以稳定旋转的螺旋波作为初始值  $t = 0$ (a);  $t = 200$ (b),  $400$ (c),  $600$  时间单位(d)无外场下参数涨落导致的螺旋波的演化; 外场强度  $E_x = 2.0, E_y = 0, t = 700$ (e),  $800$  时间单位(f); 外场强度  $E_x = 2.0, E_y = 4.0, t = 900$ (g),  $1100$ (h),  $1300$ (i) 时间单位 (快变量  $u$  采用灰度表示)

图 9 的数值计算结果表明: 参数  $\epsilon(t)$  随机涨落下施加恰当强度的外电场, 原来稳定的螺旋波逐步发生失稳, 并在外电场的作用下, 系统暂时达到稳定均匀态, 和激发情况不同的是: 在激发情况下 ( $b > 0$ ), 施加外电场后系统持久性的处于稳定均匀态, 即使参数仍然涨落也很难重新激发新的斑图, 因为外界电场主要的作用是驱除波头到系统边界, 波头与边界发生碰撞后消失, 从而消除螺旋波和湍流; 而在

振荡情况下, 考虑了参数涨落, 在外加电场下, 螺旋波波头不仅朝边界移动, 而且外电场还引起螺旋波的破裂, 破裂的螺旋波形成湍流, 各个新的波头之间互相碰撞, 在比较强的外电场下可以暂时达到稳定均匀态; 进一步的数值计算表明: 如果系统的参数继续发生涨落, 那么原来稳定均匀的状态过渡为不稳定的均匀态, 经过一段暂态过程后再到达稳定均匀态. 分析其原因可能在于: 激发态对于初始值的选择

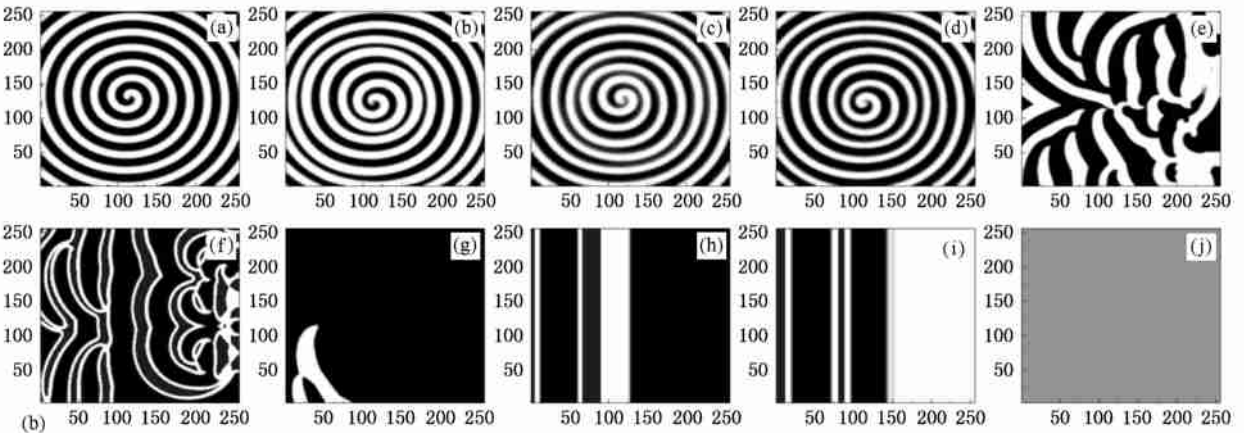


图 10 参数涨落下螺旋波和湍流在外场中的演化,  $a = 0.84, b = -0.01, \epsilon = 0.044 + 0.03 \cos t$ , 以稳定旋转的螺旋波作为初始值  $t = 0$ (a);  $t = 200$ (b),  $400$ (c),  $600$  时间单位(d)无外场下参数涨落导致的螺旋波的演化; 外场强度  $E_x = 2.5, E_y = 0, t = 1000$ (e),  $1200$  时间单位(f); 外场强度  $E_x = 2.5, E_y = 5, t = 1220$ (g),  $1240$ (h),  $1260$ (i),  $1280$ (j) 时间单位 (快变量  $u$  采用灰度表示)

比较严格, 而振荡态对于形成螺旋波等斑图则可以选取任意初始值, 所以, 外电场和参数涨落共同作用

下, 对于振荡介质中斑图的形成和转化就可能造成反复过程.

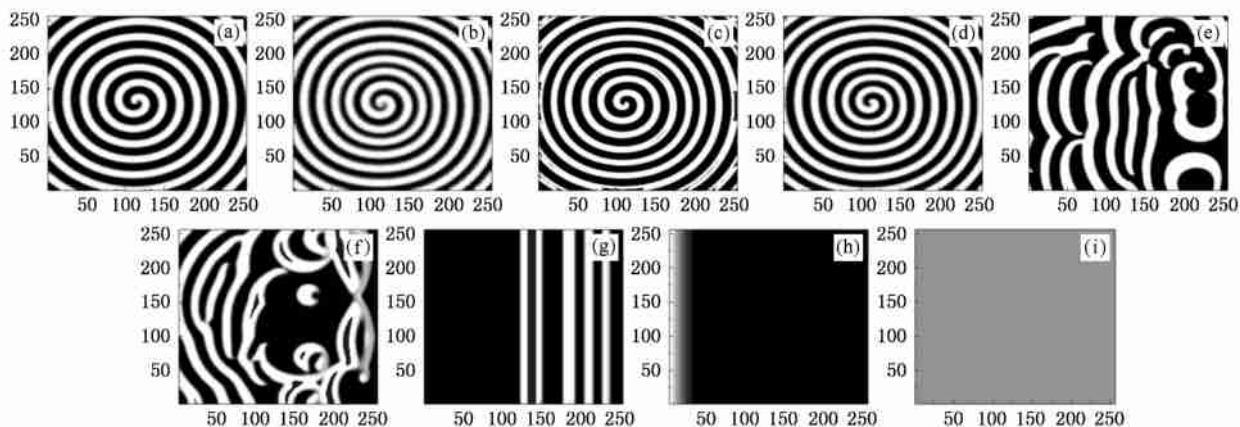


图 11 参数涨落下螺旋波和湍流在外场中的演化,  $\alpha=0.84$ ,  $b=-0.01$ ,  $\varepsilon=0.044+0.03\cos 0.2t$ , 以稳定旋转的螺旋波作为初始值  $t=0$ (a);  $t=200$ (b), 400(c), 600 时间单位(d) 无外场下参数涨落导致的螺旋波的演化; 外场强度  $E_x=2.5$ ,  $E_y=0$ ,  $t=1000$ (e), 1200 时间单位(f); 外场强度  $E_x=2.5$ ,  $E_y=5$ ,  $t=1300$ (g), 1350(h), 1400 时间单位(i) (快变量  $u$  采用灰度表示)

图 10 和图 11 的数值计算结果表明: 在参数周期性涨落下, 外加电场作用加剧了螺旋波的破裂, 这和激发介质中是不同的(主要引起波头朝边界漂移). 破裂的螺旋波在外场和参数涨落作用下, 系统最终达到持久稳定均匀态. 进一步的数值计算发现: 选择比较强的外电场则可以在比较短的暂态过程下使失稳的螺旋波和湍流快速过渡到稳定均匀态, 此时外电场作用在于引起螺旋波破裂和促使波头朝边界移动而使系统达到均匀态, 在比较弱的外场下, 即使在非常长的时间内, 也只能观测到螺旋波的破裂和演化, 而很难使系统在参数涨落下达到稳定均匀态.

以上我们分别讨论了激发和振荡介质在参数涨落下系统螺旋波和湍流对外加电场的响应问题. 为了刻画参数涨落在斑图演化中引起的作用, 我们分别考虑参数不同周期和随机形式涨落的情况, 参数涨落的幅度确保系统可以在给定的参数下出现稳定旋转的螺旋波、漫游的螺旋波和湍流态. 讨论了外加强电场和弱电场下参数涨落系统斑图的转化问题, 在数值计算中可以观测到螺旋波的破裂, 发现系统可以达到稳定均匀态.

从控制的角度看, 我们进一步尝试了采用常规周期信号和带随机相位的信号<sup>[52]</sup>来抑制以上模型中的螺旋波和湍流, 数值计算结果表明: 即使在局部刺激下也很难观测到稳定的靶波, 系统也难达到稳定均匀态.

### 3. 结 论

本文以一类改进的 Fitzhugh-Nagumo 模型为研究对象, 选择恰当的参数使系统分别处于激发和振荡态. 分别讨论了激发态和振荡态在参数涨落下螺旋波和湍流在外电场中的演化问题. 在数值模拟中, 参数涨落的范围可确保系统出现稳定旋转的螺旋波、漫游的螺旋波和湍流, 外加电场分为直接加在某个轴方向(如只加在沿  $x$  轴方向)和交叉方向(同时加在沿  $x$  轴和  $y$  轴方向, 两个方向电场强度可以相同也可以不同). 数值计算结果表明: 在参数涨落下, 施加外电场后, 一般都先观测到螺旋波的破裂, 在恰当强度的外电场下, 系统出现的螺旋波和湍流都可以被消除, 系统达到稳定均匀态. 参数涨落对斑图的转化影响是比较复杂的, 在参数涨落过程中, 新出现的波头之间相互碰撞, 外电场的作用进一步加剧了波头之间的碰撞, 但外电场还有一个主要作用在于驱使波头朝边界移动, 波头和边界发生碰撞后湮没, 系统进一步过渡到稳定均匀态. 由于内外界不确定因素影响而导致的参数涨落在化学反应和其他反应扩散系统动力学研究中也是一个值得考虑的问题, 我们将在今后反应扩散系统的特性研究中深入考虑各种参数不确定性引起的效应.

感谢应和平教授和贾亚教授对本工作有意义的建议.



- [1] Winfree A T 1987 *When Time Breaks Down* (Princeton University Press, Princeton, NJ)
- [2] Winfree A T 2001 *The Geometry of Biological Time*, 2nd ed. (Springer-Verlag, Berlin).
- [3] Mikhailov A S, Showalter K 2006 *Phys. Rep.* **425** 79
- [4] Bär M, Gottschalk N, Eiswirth M, Ertl G 1994 *J. Chem. Phys.* **100** 1202
- [5] Ipsen M, Kramer L 2000 *Phys. Rep.* **337** 193
- [6] Hildebrand M, Bär M, Eiswirth M 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1503
- [7] Memin N D 1979 *Rev. Mod. Phys.* **51** 591
- [8] Aranson I S, Kramer L 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 99
- [9] Cross M C, Hohenberg P 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 851
- [10] Hendrey M, Nam K, Guzdar P *et al* 2000 *Phys. Rev. E* **62** 7627
- [11] Winfree A T 1972 *Science* **175** 634
- [12] Müller S C, Plesser T, Hess B 1985 *Science* **230** 661
- [13] Dauby P C, Desai T, Croisier H *et al* 2006 *Phys. Rev. E* **73** 021908
- [14] Zhang H, Holden A V 1995 *Chaos, Solitons & Fractals* **5** 661
- [15] Aliev R R, Panfilov A V 1996 *Chaos, Solitons & Fractals* **7** 293
- [16] Pertsov A M, Ermakova E A, Panfilov A V 1984 *Physica D* **14** 117
- [17] Panfilov A, Hogeweg P 1993 *Physics Letters A* **176** (5) 295
- [18] Masia M, Marchettini N, Zambrano V *et al* 2001 *Chem. Phys. Lett.* **341** 285
- [19] Wan J C 2001 *Chem. Phys. Lett.* **339** 357
- [20] Tomita K, Ito A, Ohta T 1977 *J. Theor. Biol.* **68** 459
- [21] Matthew H, Ott E, Thomas M A *et al* 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 859
- [22] Vanag V K, Epstein I R 2001 *Science* **294** 835
- [23] Gong Y F, Christini D J 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 088302
- [24] Bruschi L, Nicola M E, Bär M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 89801
- [25] Xie F G, Xie D Z, Weiss J N 2006 *Phys. Rev. E* **74** 026107
- [26] Liu F C, Wang X F, Li X C, Dong L F 2007 *Chin. Phys. Lett.* **16** 2640
- [27] Ouyang Q, Felesselles J M 1996 *Nature* **379** 143
- [28] Zhou L Q, Ouyang Q 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 1650
- [29] Liao H M, Zhou L Q, Zhang C X *et al* 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 238301
- [30] Hu G, Xiao J H, Chua Leon O *et al* 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 1884
- [31] Zhang X M, Fu M L, Xiao J H *et al* 2006 *Phys. Rev. E* **74** 15202
- [32] Goryachev A, Kapral R 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1619
- [33] Wilkins M, Sneyd J 1998 *J. Theor. Biol.* **191** 299
- [34] Fenton F H, Cherry E M, Hastings H M *et al* 2002 *Chaos* **12** 852
- [35] Yang J Z, Xie F G, Qu Z L *et al* 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 148302
- [36] Zykov V S, Engel H 2002 *Phys. Rev. E* **66** 16206
- [37] Pollmann M, Bertram M, Rotemund H H 2001 *Chem. Phys. Lett.* **346** 123
- [38] Zykov V S, Mikhailov A S, Müller S C 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3398
- [39] Ma J, Wei Z Q, Chen Y H *et al* 2005 *Chin. J. Chem. Phys.* **18** 997 (in Chinese) [马 军、魏智强、陈玉红等 2005 化学物理学报 **18** 997]
- [40] Ma J, Jin W Y, Li Y L *et al* 2007 *Chin. J. Chem. Phys.* **20** 53
- [41] Alonzo S, Saques F, Mikhailov A S 2003 *Science* **299** 1722
- [42] Wu N J, Zhang H, Ying H P *et al* 2006 *Phys. Rev. E* **73** 060901
- [43] Jun M, Li Y L, Jiang J L *et al* 2006 *Phys. A* **369** 387
- [44] Wang P Y, Xie P 2000 *Phys. Rev. E* **61** 5120
- [45] Zhang H, Hu B B, Hu G 2003 *Phys. Rev. E* **68** 026134
- [46] Zhang H, Cao Z J, Wu N J *et al* 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 188301
- [47] Yuan G Y, Wang G R, Chen S G 2005 *Europhys. Lett.* **2005** 72 908
- [48] Ramos J I 2002 *Chaos, Solitons & Fractals* **13** 1383
- [49] Ma J, Wang C N, Li Y L *et al* 2007 *Chaos, Solitons & Fractals* **33** 965
- [50] Ma J, Ying H P, Pu Z S 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 1065
- [51] Ma J, Ying H P, Li Y L 2007 *Chin. Phys. Lett.* **16** 955
- [52] Ma J, Jin W Y, Li Y L *et al* 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2456 (in Chinese) [马 军、靳伍银、李延龙等 2007 物理学报 **56** 2456]
- [53] Ma J, Pu Z S, Feng W J *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4602 (in Chinese) [马 军、蒲忠胜、冯旺军等 2005 物理学报 **54** 4602]
- [54] Wang P Y, Xie P, Yin H W 2003 *Chin. Phys. Lett.* **12** 674
- [55] Hou Z H, Xin H W 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 280601
- [56] Wang H L, OuYang Q 2005 *Chaos* **15** 023702
- [57] Wang X, Tian X, Wang H L *et al* 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 2365
- [58] Zhao Y K, Wang G R, Chen S G 2007 *Chin. Phys. Lett.* **16** 1159
- [59] Yuan G Y, Yang S P, Wang G R *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1510 (in Chinese) [袁国勇、杨世平、王光瑞等 2005 物理学报 **54** 1510]
- [60] Qian Y, Song X Y, Shi W *et al* 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4420 (in Chinese) [钱 郁、宋宣玉、时 伟等 2006 物理学报 **55** 4420]
- [61] Zhan M, Wang X G, Gong X F *et al* 2005 *Phys. Rev. E* **71** 036212
- [62] Zhan M, Luo J M, Gao J H 2007 *Phys. Rev. E* **75** 016214
- [63] Zhang S L, Hu B B, Zhang H 2003 *Phys. Rev. E* **67** 16214
- [64] Liu S Q, Lu Q S, Wang Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1057 (in Chinese) [刘深泉、陆启韶、王 琪 1998 物理学报 **47** 1057]
- [65] Liu S Q 2004 *App. Math. Mech.* **25** 911
- [66] Liu S Q, Song L 2005 *App. Math. Mech.* **26** 854 (in Chinese) [刘深泉、宋 乐 2005 应用数学和力学 **26** 854]
- [67] Guo H, Liao H, Ouyang Q 2002 *Phys. Rev. E* **66** 26104
- [68] Hervé, Henry 2004 *Phys. Rev. E* **70** 026204
- [69] Chen J X, Zhang H, Li Y Q 2006 *J. Chem. Phys.* **124** 14505
- [70] Shao X, Ren Y, Ouyang Q 2006 *Chin. Phys. Lett.* **15** 513
- [71] Kuramoto Y 1984 *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Berlin: Springer)
- [72] Nicolis G 1993 *Introduction to Nonlinear Science* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [73] Zhang X, Hu G 2006 *Eur. Phys. J. B* **51** 389
- [74] Bär M, Eiswirth 1993 *Phys. Rev. E* **48** R1635
- [75] Margerit D, Barkley D 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 175
- [76] Margerit D, Barkley D 2002 *Phys. Rev. E* **66** 036214

# Control of spiral wave and turbulence in the time-varied reaction-diffusion system<sup>\*</sup>

Ma Jun<sup>1)†</sup> Jin Wu-Yin<sup>2)</sup> Yi Ming<sup>3)</sup> Li Yan-Long<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>(*Department of Physics, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China*)

<sup>2)</sup>(*College of Mechano-Electronic Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China*)

<sup>3)</sup>(*Department of Physics, Central China Normal University, Wuhan 430079, China*)

(Received 28 August 2007; revised manuscript received 16 October 2007)

## Abstract

We investigated the external electric field-induced transition of the spiral wave and turbulence in a class of time-varied reaction-diffusion systems. In our numerical simulation, a modified Fitzhugh-Nagumo model, which was used to describe the excitable and/or oscillatory media under appropriate parameters, was investigated. The effect induced by the random and/or other uncertain factors (for example, external and interior noise, gas pressure, temperature gradient and deformation of media etc.) was considered. The amplitude of the fluctuations of parameters was selected at appropriate values so that stable rotating spiral wave, meandering spiral wave and turbulence could be observed respectively. The external electric field was introduced into the media after a transient period allowing for parameter fluctuations. It was found that only the breakup of spiral wave was observed and the whole media could not reach homogeneous state when weak electric field and parameter fluctuation were used. It was confirmed that the breakup of spiral wave happens and then the whole media becomes stably homogeneous when appropriately strong intensity of external electric field is applied to the whole media together with the action of parameter fluctuation. The snapshots of the activator are used to investigate the transition of the patterns in the presence of external electric field and under parameter fluctuation, and relevant theoretical discussion is given in the present paper.

**Keywords:** spiral wave, turbulence, time-varied system, Fitzhugh-Nagumo model

**PACC:** 0545, 8730C, 0565, 8220M

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10747005, 10572056 and 30670529).

<sup>†</sup> E-mail: hyperchaos@163.com, hyperchaos@lut.cn