DOI:10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2008.02.029
第20卷 第2期 甘肃科学学报 Vol.20 No.2
2008年6月 Journal of Gansu Sciences Jun.2008

# 二次受力下CFRP加固RC梁的刚度计算方法

朱彦鹏,赵丹丹,谭坚贞
(兰州理工大学 土木工程学院,甘肃 兰州 730050)

**摘 要:** 将CFRP加固梁的弯矩-曲率关系理想化为三线型,通过平衡方程的建立,推导出加固后RC梁的刚度计算方法.解决了目前CFRP加固钢筋混凝土受弯构件刚度计算中,忽略2次受力产生的碳纤维应变滞后值,从而导致过高估计构件实际承载力的问题.

**关键词:** CFRP;钢筋混凝土梁;刚度;滞后应变
**中图分类号:** TU375·1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-0366(2008)02-0060-04

# Calculating Method for the Stiffness of RC Beam Strengthened with CFRP under Quadratic Loading

ZHU Yan-peng, ZHAO Dan-dan, TAN Jian-zhen
(*College of Civil Engineering, Lanzhou University of Science and Technology, Lanzhou* 730050, *China*)

**Abstract:** The moment-curvature curve of the strengthened beam with CFRP was presumed to the idealized three-segment-line type. The calculation method of strengthened stiffness of RC beam was deduced by building the equilibrium equation. The hysteretic strain value of CFRP due to quadratic loading has been often neglected in the calculations of stiffness of strengthening reinforced concrete bending member. The ouerestimation of the actual supporting capacity of members was resolved by the above method.

**Key words:** carbon fiber reinforced polymers(CFRP); reinforced concrete (RC)beam; stiffness; hysteretic strain

在实际工程中,由于各种原因需要对已有建筑物进行维修和加固,近几年来,碳纤维以其良好的耐腐蚀性、耐久性、很高的强度质量比、施工快捷、适应性强以及与混凝土良好的协同工作等优良性能被广泛的应用于加固领域.但在加固的过程中有许多构件是不卸载或部分卸载的,而现有的抗弯加固理论,通常不考虑2次受力的情况,实际上这种方法过高估计了构件的实际承载力.在近几年的文献中一些学者对考虑一次受力下构件的刚度进行了理论研究[1~4],但对于考虑2次受力时刚度计算的理论研究很少,因此对2次受力下加固后刚度的理论计算进行推导.

## 1 基本假定

对碳纤维加固梁正截面进行抗弯计算时,作如下基本假定:

(1) CFRP加固钢筋混凝土受弯构件正截面平均应变满足平截面假定;

(2)不考虑截面受拉区混凝土的作用($M_{cr}$计算除外);

(3)在达到受弯承载力极限状态前,各种材料变形协调.

## 2 滞后应变的计算

在初始弯矩 $M_0$ 作用下应变关系为[5]

$$\varepsilon_c/\varepsilon_s = x/(h_0 - x),$$

$$\varepsilon_c/(\varepsilon_{cf0} + \varepsilon_c) = x/h.$$

(1) 当在初始弯矩作用下混凝土处于弹性阶段,即 $E_c\varepsilon_c bx/2 = R_s\varepsilon_s A_s$,可得实际受压区高度为

$$x = (-B + \sqrt{B^2 - 4AC_1})/2A,$$

$$A = E_c b/2, B = E_s A_s, C_1 = -E_s A_s h_0,$$

收稿日期:2007-06-08

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

对受拉钢筋取矩

$$M_0 = 0.5E_c\varepsilon_c xb(h_0 - x/3).$$

碳纤维滞后应变

$$\varepsilon_{cf0} = 2M_0(h-x)/[E_c x^2 b(h_0 - x/3)]\text{(x 取值同上)}.$$

(2) 当在初始弯矩作用下混凝土进入弹塑性阶段,平衡关系

$$C = T_s, C = \int_0^x \sigma_c(\varepsilon)b\mathrm{d}y = f_c bx\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{\varepsilon_0}{3\varepsilon_0}\right).$$

若此时钢筋不屈服则有 $T_s = E_s\varepsilon_s A_s$. 可得受压区高度为

$$x = \left(-1+\sqrt{1+4Ah_0}\right)/2A,$$

其中

$$A = f_c b\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{\varepsilon_c}{3\varepsilon_0}\right)/(E_s A_s\varepsilon_s),$$

再对受拉钢筋取矩有

$$M_0 = f_c xb\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{\varepsilon_c}{3\varepsilon_0}\right)(h_0 - x + y_c),$$

其中

$$y_c = \frac{\int_0^x \sigma_c(\varepsilon_c)y\mathrm{d}y}{\int_0^x \sigma_c(\varepsilon_c)\mathrm{d}y} = \frac{x}{\varepsilon_{cu}}\times\frac{6\varepsilon_{cu}^2-\varepsilon_0^2}{12\varepsilon_{cu}-4\varepsilon_0},$$

由上式可求得 $\varepsilon_c$,碳纤维滞后应变为

$$\varepsilon_{cf0} = (h-x)\varepsilon_c/x.$$

若此时钢筋屈服则有 $T_s = f_y A_s$. 受压区高度为

$$x = \frac{3\varepsilon_0^2 f_y A_s}{f_c b\varepsilon_c(3\varepsilon_0-\varepsilon_c)},$$

$$M_0 = f_c xb\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{\varepsilon_c}{3\varepsilon_0}\right)(h_0 - x + y_c).$$

由上式可求得 $\varepsilon_c$,碳纤维滞后应变为

$$\varepsilon_{cf0} = (h-x)\varepsilon_c/x$$

其中 $\varepsilon_c, \varepsilon_0, \varepsilon_{cu}, \varepsilon_s, \varepsilon_{cf0}$ 分别表示压区混凝土边缘压应变,混凝土达到受压强度峰值时对应的压应变,压区混凝土边缘极限压应变,钢筋拉应变,碳纤维布应变滞后值;

$E_c, E_s, E_{cf}$ 分别表示混凝土的弹性模量,钢筋的弹性模量,碳纤维布的弹性模量;

$b, h, h_0$ 分别表示梁的宽度,高度及钢筋到压区混凝土边缘的距离;

$x, A_s$ 分别表示混凝土的实际受压区高度及纵向受拉钢筋的截面面积.

## 3　考虑二次受力加固的刚度计算

理想的 CFRP 加固钢筋混凝土梁的弯矩—曲率关系曲线,可分为 3 个阶段[6]见图 1.

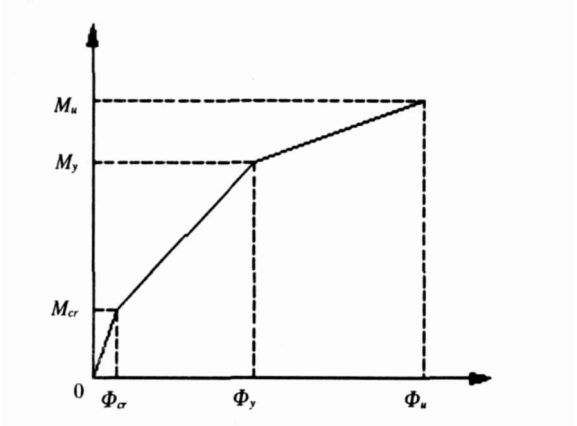


图 1　CFRP 加固梁的弯矩—曲率关系

开裂前;开裂至受拉钢筋屈服;受拉钢筋屈服至梁达到极限承载力而破坏. 在各个阶段中假定弯矩—曲率关系为线性,三折线的交点分别位于开裂弯矩及屈服弯矩处,以下分别计算开裂弯矩、屈服弯矩及极限弯矩对应的加固梁抗弯刚度.

### 3.1　加荷初期至混凝土开裂

在梁下边缘的混凝土小于等于抗拉强度以前所有材料的应力—应变关系按直线变化. 根据平截面假定有

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{ct} &= \varepsilon_c(h-x)/x\\ \varepsilon_s &= \varepsilon_c(h-x)/x\\ \varepsilon_{cf} &= \varepsilon_c(h-x)/x\end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

开裂时有 $\varepsilon_{ct} = f_1/E_c$($f_t$ 为混凝土的极限拉应力,$\varepsilon_{cf}$ 为碳纤维布的名义拉应变).

第 1 阶段为弹性变形阶段由平衡关系得

$$\frac{1}{2}E_c\varepsilon_c bx = \frac{1}{2}f_t b(h-x) + E_s\varepsilon_s A_s + E_{cf}(\varepsilon_c f - \varepsilon_{cf0})A_{cf}. \tag{2}$$

由式(1)、(2) 可得

$$x = \frac{h^2 + 2\alpha_E A_s h_0/b + 2\alpha_{Ef}ht}{2h + 2\alpha_E A_s/b + 2\alpha_{Ef}t}, \tag{3}$$

其中

$\alpha_E = E_s/E_c, \alpha_{Ef} = E_{cf}/E_c$($t$ 为碳纤维布的厚度),由 $x$ 根据式(1) 可以求出 $\varepsilon_c, \varepsilon_s, \varepsilon_{cf}$. 同时根据曲率与应变的关系可以得到曲率 $\phi$ 值:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_c &= \phi x,\\ \varepsilon_s &= \phi(h_0 - x),\\ \varepsilon_{cf} &= \phi(h-x).\end{aligned}\right. \tag{4}$$

根据文献[7] 中刚度计算公式

$$B_s = M/\phi = Mh_0/(\varepsilon_{cm} + \varepsilon_{sm}), \tag{5}$$

$$M = \frac{1}{3}f_t b(h-x)h + E_s\phi(h_0 - x)A_s\left(h_0 - \frac{1}{3}x\right) + E_{cf}[\phi(h-x) - \varepsilon_{cf0}]A_{cf}\left(h - \frac{1}{3}x\right). \tag{6}$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

钢筋混凝土受弯构件在混凝土未开裂前，受拉区钢筋与混凝土共同受力，沿构件长度方向，钢筋及混凝土的应力、应变各自大致保持相等[7]，即

$$\varepsilon_{cm}=\varepsilon_x=\phi,\quad \varepsilon_{sm}=\varepsilon_s=\phi(h_0-x),\tag{7}$$

将式(7)和式(8)代入式(6)中得短期刚度为

$$B_s=\frac{f_1bh(h-x)}{3\phi}+E_sA_s(h_0-x)\left(h_0-\frac{1}{3}x\right)+E_{cf}A_{cf}\left(h-\frac{1}{3}x\right)\frac{\phi(h-x)-\varepsilon_{cf0}}{\phi},\tag{8}$$

式中 $A_{cf}$，$\phi$ 分别表示碳纤维布的截面面积，平均曲率；$\varepsilon_{cm}$，$\varepsilon_{sm}$ 分别表示受压区边缘混凝土平均应变，拉区钢筋平均应变.

3.2 开裂到钢筋屈服的阶段

(1)平均应力 $\sigma_c$，$\sigma_s$ 在此阶段混凝土的应力为曲线形(边缘应力为 $\sigma_c$)可简化为矩形进行计算，其折算高度为 $\xi h_0$，丰满系数为 $\omega$，裂缝截面处内力臂长度系数 $\eta$，钢筋保护层厚度 $a$，其截面应力图为如图2，图3.

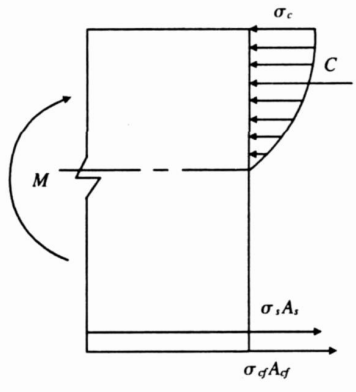


图2 截面应力分布

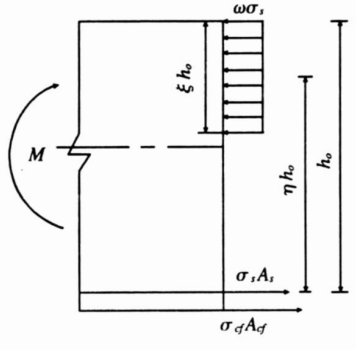


图3 等效矩形应力分布

由几何相似关系 $\varepsilon_{cf}$ 和 $\varepsilon_y$ 的关系可近似为

$$\varepsilon_{cf}=h\varepsilon_s/h_0,\tag{9}$$

同时钢筋已经屈服有

$$\sigma_s=f_y,\ \varepsilon_s=f_y/E_s=\varepsilon_y,\tag{10}$$

式中 $f_y$ 为钢筋的屈服强度.

在忽略受拉区混凝土拉应力的条件下，可建立如下平衡方程

$$M=f_yA_s\eta h_0+\sigma_{cf}A_{cf}(\eta h_0+a)=f_yA_s\eta h_0+E_{cf}A_{cf}\left(\frac{h}{h_0}\times\varepsilon_y-\varepsilon_{cf0}\right)(\eta h_0+a),\tag{11}$$

$$M=\omega\sigma_c\xi h_0b\eta h_0+\sigma_{cf}A_{cf}a,\tag{12}$$

由式(11)、(12)可求得 $\sigma_c$

$$\sigma_c=\frac{E_sA_s\varepsilon_y+E_{cf}A_{cf}\left(\frac{h}{h_0}\times\varepsilon_y-\varepsilon_{cf0}\right)}{\varepsilon\xi h_0b}.\tag{13}$$

(2)平均应变 $\varepsilon_{cm}$，$\varepsilon_{sm}$ 裂缝间纵向受拉钢筋的拉应变不均匀系数为 $\Psi$，受压区边缘混凝土压应变不均匀系数为 $\Psi_c$，则钢筋和混凝土的平均应变 $\varepsilon_{sm}$，$\varepsilon_{cm}$ 为

$$\varepsilon_{sm}=\Psi\varepsilon_s=\Psi\varepsilon_y,\tag{14}$$

$$\varepsilon_{cm}=\Psi_c\frac{E_sA_s\varepsilon_y+E_{cf}A_{cf}\left(\frac{h}{h_0}\times\varepsilon_y-\varepsilon_{cf0}\right)}{\gamma\omega\xi h_0bE_c},\tag{15}$$

式中 $\gamma$ 为混凝土的弹性系数，$\gamma=\varepsilon_e/\varepsilon_c$.

令 $\zeta=\omega\xi\eta\gamma/\Psi_c$，则式(15)可写为

$$\varepsilon_{cm}=\frac{\eta\left[E_sA_s\varepsilon_y+E_{cf}A_{cf}\left(\frac{h}{h_0}\times e_y-\varepsilon_{cf0}\right)\right]}{\zeta h_0bE_c}.\tag{16}$$

(3)短期刚度 将式(11)、(14)、(16)代入式(5)得

$$B_s=\frac{M}{\phi}=\frac{Mh_0}{\varepsilon_{sm}+\varepsilon_{cm}}=\frac{E_sA_sh_0^2+E_{cf}A_{cf}hh_0\left(\frac{h}{h_0}-\frac{\varepsilon_{cf0}}{\varepsilon_y}\right)}{\frac{\Psi}{\eta}+\frac{\alpha_E\rho_s}{\zeta}+\left(\frac{h}{h_0}-\frac{\varepsilon_{cf0}}{\varepsilon_y}\right)\frac{\alpha_{Ef}\rho_{cf}}{\zeta}},\tag{17}$$

式中

$$\alpha_E=\frac{E_s}{E_c},\ \alpha_{Ef}=\frac{E_{cf}}{E_c},\ \rho_s=\frac{A_s}{bh_0},\ \rho_{cf}=\frac{A_{cf}}{bh_0},$$

因为很多研究表明碳纤维对 $\Psi$，$\eta$ 的影响不大，所以可根据文献[7]中的公式进行计算，

$$\eta=0.87,\ \Psi=1.1-0.65\frac{f_t}{\rho_{te}f_y},\ \rho_{te}=\frac{A_s}{A_{te}},\tag{18}$$

其中 $A_{te}$ 为有效受拉混凝土截面面积，当截面为矩形时 $A_{te}=0.5bh$.

设 $K=\frac{\alpha_E\rho_s}{\zeta}+\left(\frac{h}{h_0}-\frac{\varepsilon_{cf0}}{\varepsilon_y}\right)\frac{\alpha_{Ef}\rho_{cf}}{\zeta}$，目前对2次受力的试验很少，含有全部材料性能参数的仅找到文献[8]，拟和的结果为

$$K=12.29\left[\alpha_E\rho_s+\left(\frac{h}{h_0}-\frac{\varepsilon_{cf0}}{\varepsilon_y}\right)\alpha_{Ef}\rho_{cf}\right]-0.48,\tag{19}$$

此结果带有一定的局限性，还需要经过大量的试验结果进行拟合.

3.3 钢筋屈服到破坏阶段

根据平截面假定及平衡条件有

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\varepsilon_{cf} = \varepsilon_{cu}(h - x)/x, \quad \varepsilon_s = \varepsilon_{cu}(h_0 - x)/x, \tag{20}$$

$$0.8\alpha_1 f_c b x = f_y A_s + E_{cf} A_{cf}(\varepsilon_{cf} - \varepsilon_{cf0}), \tag{21}$$

由式(20)、(21) 得

$$x = (-B + \sqrt{B^2 - 4AC})/2A, \tag{22}$$

其中

$A = 0.8\alpha_1 f_c b$, $B = E_{cf} A_{cf}(0.003\,3 + \varepsilon_{cf0}) - f_y A_s$,

$C = -0.003\,3 E_{cf} A_{cf} h$

弯矩

$$M = 0.8\alpha_1 f_c b x(h - 0.4) - f_y A_s a, \tag{23}$$

曲率

$$\bar{\phi} = \frac{\varepsilon_{cm} + \varepsilon_{sm}}{h_0} = \frac{\varepsilon_{cu} + \Psi\varepsilon_s}{h_0} = \varepsilon_{cu}\frac{x + \Psi(h_0 - x)}{x h_0}, \tag{24}$$

极限状态时梁的刚度为

$$B_s = \frac{0.8\alpha_1 f_c b x^2 h_0(h - 0.4x) - f_y A_s a x h_0}{0.003\,3[x + \Psi(h_0 - x)]}, \tag{25}$$

以上公式符号除做特殊说明外,其他均与文献[7]中的符号意义相同.

## 4　计算与试验结果的对比

由于篇幅限制仅取文献[8]中的试验梁 FB-3, FB-4 进行计算,试件是矩形截面简支梁:跨度 2 600 mm,净跨2 400 mm,截面宽度 150 mm,截面高度 250 mm,混凝土 C20,受拉主筋 3Φ12,2 个梁底面均粘贴一层碳纤维布,碳纤维布宽度为 80 mm,规格为 300 g/m$^2$,计算厚度 0.167 mm,拉伸弹性模量 235 GPa,拉伸强度 3 240 MPa. FB-3、FB-4 的初始荷载分别为 12 kN、18 kN. 根据文献中的弯矩-挠度图可以看出刚度基本为折线形,即在每一阶段刚度基本保持不变,经计算可得出如下的荷载-挠度曲线对比见图 4,图 5.

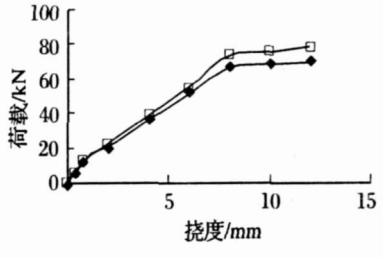


图 4　FB-3 荷载-挠度对比曲线

—◆— 计算值　—□— 试验值

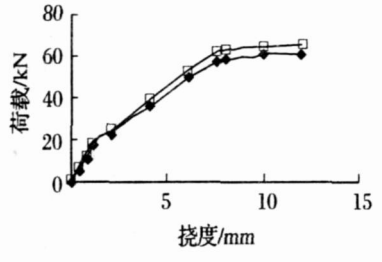


图 5　FB-4 荷载-挠度对比曲线

—◆— 计算值　—□— 试验值

## 5　结　论

将 CFRP 加固钢筋混凝土梁的弯矩-曲率关系曲线简化为理想三线型用于计算梁的刚度,可达到足够的计算精度. 可应用上述方法对 2 次受力加固后的梁进行刚度计算,但第 2 阶段中 K 的表达式有待于应用大量的试验结果进行拟合.

**参考文献:**

[1]　杨玫,王苏岩. 碳纤维布加固钢筋混凝土梁抗弯刚度计算[J]. 建筑科学,2005,21(4): 34-37.

[2]　杨勇新,岳清瑞. 碳纤维布加固混凝土梁截面刚度计算[J]. 工业建筑,2001,31(9):1-3.

[3]　翟爱良,肖建庄,田洪臣. CFRP 提高钢筋混凝土梁抗弯刚度的分析与近似计算[J]. 结构工程师,2003,19(2): 50-53.

[4]　张学礼,贾瑞强,尹显南. 碳纤维布加固混凝土梁截面刚度计算及计算机模型[J]. 工业建筑,2006,36(增):1 042-1 045.

[5]　朱剑俊,欧新新,刘勇. 碳纤维加固钢筋混凝土受弯构件的应变滞后分析[J]. 特种结构,2003,20(1): 48-50.

[6]　田水,谷倩,张海涛. 碳纤维布补强加固钢筋混凝土梁的刚度计算方法[J]. 武汉理工大学学报,2004,26(12): 49-51.

[7]　沈蒲生,梁兴文编. 混凝土结构设计原理[M]. 北京:高等教育出版社,224-228.

[8]　周仕刚,高永飞. CFRP 加固初始受载钢筋砼梁弯曲性能的试验研究[J]. 玻璃钢/复合材料,2003,30(1):3-6.

**作者简介:**

**朱彦鹏** (1960-)男,甘肃省庆阳人,1984 年毕业于重庆建筑工程学院结构工程专业,获理工硕士学位. 现任兰州理工大学土木工程学院院长,结构工程研究所所长,教授,博士生导师. 主要从事工程事故分析与处理等领域的教学及研究工作.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net