DOI:10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2008.02.013
第20卷 第2期 甘肃科学学报 Vol.20 No.2
2008年6月 Journal of Gansu Sciences Jun.2008

均布载荷作用下超静定梁的抗弯刚度优化设计

项长生[1], 李清禄[2], 陈伟年[3]
(1.兰州理工大学 土木工程学院, 甘肃 兰州 730050; 2.兰州理工大学 理学院, 甘肃 兰州 730050;
3.甘肃省武威市凉州区五和中学, 甘肃 武威 733000)

摘 要: 研究了均布载荷作用下一次超静定等强度梁的最优刚度分布.根据阶梯折算法思想, 给出了目标函数、几何约束条件、设计变量的显式表达式和算例.

关键词: 阶梯折算法; 超静定; 梁; 抗弯刚度; 最优
中图分类号: O343 文献标识码: A 文章编号: 1004-0366(2008)02-0068-03

Optimal Design of the Flexural Rigidity Static-indeterminant Beam under Distributed Loads

XIANG Chang-sheng[1], LI Qing-lu[2], CHEN Wei-nian[3]
(1. *School of Civil Engineering, Lanzhou University of Science and Technology, Lanzhou 730050, China*;
2. *School of Sciences, Lanzhou University of Science and Technology, Lanzhou 730050, China*;
2. *Wuhe Middle School, Wuwei 733000, China*)

Abstract: The optimal rigidity distribution of the equi-strength one-static-indeterminant beam under distributed loads is studied. Based on the thinking of stepped reduction method, the governing equation can be explicitly expressed by the design variables as well as geometric constraints. An illustrative example is also given.

Key words: stepped reduction method; static-indeterminant; beam; flexural rigidity; optimalization

在给定承载能力下, 桥梁结构优化设计主要包括形状优化设计和强度优化设计。而对梁的优化设计文献主要集中在体积最优设计方面[1~3].但实际工程中抗弯刚度设计更为重要[4].梁的等强度设计可归结为梁的抗弯刚度的设计[5], 在工程实际上具有重要的意义.文献[6]用矩阵位移法给出了结构优化分析的实用算法.梁斌等计算了弹性圆柱壳的刚度最优化设计[7].文献[8]研究了等强度梁在任意集中载荷作用下抗弯刚度的优化设计.而在分布载荷作用下对梁的抗弯刚度设计的文章鲜见.

考虑到目标函数和约束条件的复杂性, 以及它们是设计变量隐函数的情况, 采用分段等分的办法, 得到了目标函数和几何约束条件关于设计变量的显式表达式.最后归结为求解一组方程数目与梁的超静定次数相等的非线性代数方程.从计算的算例来看, 该方法有许多优点.

1 基本方程

考虑长为 l, 截面为矩形, 高为 h, 宽为 b 的逐段变刚度一次超静定梁, 梁上作用有均匀分布的载荷 q. 如图1.

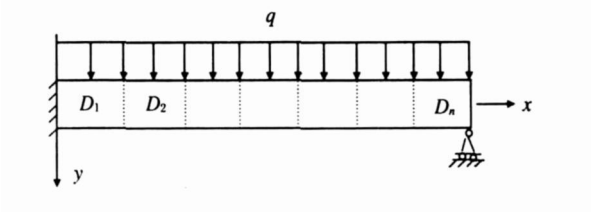

图1 均布载荷作用的变刚度梁

显然, 在均布载荷 q 的作用, 在目前的支承情况下, 梁上的弯矩分布必有如图2所示的曲线. 梁上有

收稿日期: 2007-05-14
基金项目: 兰州理工大学科研发展基金(SB10200420)

一个弯矩为 0 的点 x_1 和剪力为 0 的点 x_2, 且 M_0 必小于 0.

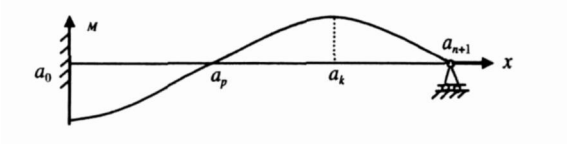

图 2　梁的弯矩分布

基于梁的弯矩分布情况, 对全梁进行分段等分, 即分成 3 部分来考虑. 将梁分成$(n+1)$段分 3 段等分的阶梯梁(这里的 n 是任意的). 其中 $a_i(i=0, 1, \cdots, p, p+1, \cdots, k, \cdots, n+1)$ 是各分点的坐标, 且 $a_0=0$, $a_{n+1}=l$. 我们以 $D_i(i=0, 1, 2, \cdots, n)$ 表示第 i 段$(a_i \leqslant x < a_{i+1})$的抗弯刚度. 由阶梯折算法, 梁的挠度表达式由文献[5] 为

$$y(x)=y(0)+y'(0)x-\frac{M_0}{D_o}\sum_{i=0}^{n}(\delta_i-\delta_{i-1})\{x-a_i\}^0\circ$$
$$\left[-\frac{M_0}{2}\{x-a_i\}^2-\frac{Q_0}{6}(x-a_i)^2(x+2a_i)+\right.$$
$$\frac{1}{6}(x-a_i)^2(x+2a_i)\int_0^{a_i}q(x)\mathrm{d}x-$$
$$\frac{(x-a_i)^2}{2}\int_0^{a_i}xq(x)\mathrm{d}x+$$
$$\left.\int_0^x\int_0^{x1}\int_0^{x2}\int_0^{x3}q(z)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1\right], \tag{1}$$

式中 $\delta_i=D_0/D_i(i=0, 1, 2, \cdots, n)$, 并规定 $\delta_{-1}=0$, $y(0)$, $y'(0)=0$, M_0 和 Q_0 分别为梁在 $a_0(x=0)$ 点的挠度、转角、弯矩和剪力; $\{x-a_i\}^0$ 是 Heaviside 函数, 定义为

$$\{x-a_i\}^0=\begin{cases}1, & x\geqslant a_i\\ 0, & x<a_i.\end{cases} \tag{2}$$

该梁在任意截面上的弯矩 $M(x)$ 为

$$M(x)=M_0+Q_0x-\frac{qx^2}{2}, \tag{3}$$

剪力为

$$Q(x)=Q_0-q\circ x. \tag{4}$$

2　边界条件和强度条件

2.1　边界条件

在一端固支, 一端简支的情况下, 梁的边界条件为

当 $x=0$ 时,

$$y(0)=0,\ y'(0)=0; \tag{5}$$

当 $x=l$ 时,

$$y(l)=0, \tag{6}$$

$$M(l)=0, \tag{7}$$

将边界条件式(7) 代入式(3) 得

$$Q_0=\frac{ql}{2}-\frac{M_0}{l}, \tag{8}$$

各分点的弯矩为

$$M(a_i)=M_0\left(1-\frac{a_i}{l}\right)+a_i[F_0(l)-F_0(a_i)]+$$
$$F_1(a_i)-\frac{a_i}{l}F_1(l), \tag{9}$$

利用分部积分法及边界条件(5) 和式(6), 式(1) 可写为

$$y(l)=\frac{2}{Eb}\sum_{i=0}^{n}h_i^{-3}(M_0A_i+B_i), \tag{10}$$

其中

$$A_i=\frac{2}{l}[3l(a_{i+1}^2-a_i^3)-3l^2(a_{i+1}-a_i)-(a_{i+1}^3-a_i^3)], \tag{11}$$

$$B_i=\frac{ql}{2}[3l(a_{i+1}^3-a_i^3)-3l(a_{i+1}^2-a_i^2)]+$$
$$\frac{3qa_i^3}{2}(2l-a_i)-\frac{3qa_{i+1}^3}{2}(2l-a_{i+1})+$$
$$qa_i^3(2a_i-3l)-qa_{i+1}^3(2a_{i+1}-3l)+$$
$$ql(a_{i+1}^3-a_i^3)-\frac{q}{4}(a_i^4-a_{i+1}^4). \tag{12}$$

2.2　强度条件

强度条件可写为

$$i\leqslant p-1,\quad \frac{12^{\frac{2}{3}}}{6}\left(\frac{b}{E^2}\right)^{\frac{1}{3}}[\sigma]D_i^{\frac{2}{3}}\geqslant -M(a_i), \tag{13}$$

$$p\leqslant i\leqslant k-1,\quad \frac{12^{\frac{2}{3}}}{6}\left(\frac{b}{E^2}\right)^{\frac{1}{3}}[\sigma]D_i^{\frac{2}{3}}\geqslant -M(a_{i+1}), \tag{14}$$

$$k\leqslant i,\quad \frac{12^{\frac{2}{3}}}{6}\left(\frac{b}{E^2}\right)^{\frac{1}{3}}[\sigma]D_i^{\frac{2}{3}}\geqslant -M(a_i), \tag{15}$$

对于等强度梁, 在式(13 ~ 15) 中都应有等式成立, 式中$[\sigma]$ 为材料的许用正应力.

当 M_0 给定时, 可通过强度约束求出各个段的刚度 $D_i(i=0, 1, \cdots, n)$ 是 M_0 一个变量的函数, 显然刚度 D_i 是 M_0 的显式表达式. 上述问题可归结为求一组 D_i, 即求解关于 M_0 的一个非线性代数方程. 在满足式(13 ~ 15) 条件下, 使式(10) 成立, 即 $y(l)=0$. 我们用牛顿迭代法[9] 求出满足式(10) 的 D_0, 并进而确定其余的 $D_i(i=0, 1, \cdots, n)$.

3　算例

考虑一端固支, 一端简支的梁, 其上作用均布载荷的强度为 $q=100$ N/m, 梁宽 $b=240$ mm, 梁长 $l=9\,000$ mm. 材料的$[\sigma]=160$ MPa, Yong 氏模量 $E=2\times10^5$ MPa.

将全梁分为 18 段,根据弯矩分布情况分为 3 部分,每部分等分为(6-6-6)段和(8-5-5)段,求得 18 段变刚度梁的各个刚度如表 1 和表 2 所示.图 3 给出抗弯刚度随截面变化的曲线.

表 1 优化后各个截面的抗弯刚度 单位: kN/m²

i	D	i	D	i	D
0	513 880	6	9 080	12	53 730
1	352 270	7	22 250	13	51 510
2	225 380	8	34 900	14	45 030
3	129 720	9	45 030	15	34 900
4	61 910	10	51 510	16	22 250
5	18 950	11	53 730	17	9 080

表 2 优化后各个截面的抗弯刚度 单位: kN/m²

i	*D*	*i*	*D*	*i*	*D*
0	419 630	6	33 150	12	68 650
1	321 080	7	10 690	13	68 650
2	237 430	8	14 830	14	64 570
3	167 730	9	35 150	15	52 850
4	111 020	10	52 850	16	35 150
5	66 420	11	64 570	17	14 830

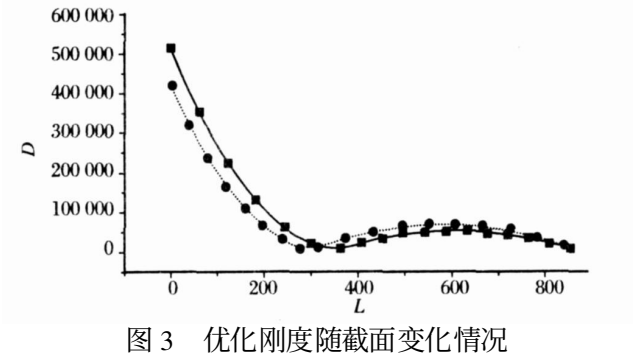

图 3 优化刚度随截面变化情况

—■—(6—6—6) ··●··(8—5—5)

4 结论

(1) 对原有阶梯折算法进行改进,得到了目标函数和约束条件关于设计变量的显式表达式.得到了满足强度要求的梁刚度最优分布.

(2) 从优化结果看,越靠近夹紧端要求的抗弯刚度越大,在弯矩为 0 的点处抗弯刚度最小,其 2 个弯矩为0的点中间刚度呈对称抛物线形状分布.其优化结果为加筋桥梁的优化设计提供了理论依据.

参考文献:

[1] 俞焕然,姚林泉.在给定屈曲载荷作用下弹性环形薄板的体积优化设计[J].兰州大学学报(自然科学版),1993,29(1):33-35.

[2] 张爱国,张忠会.用边界元法进行等强度梁的形状优化[J].河北工业大学学报,1997,26(1):36-81.

[3] 李清禄,谢新港.集中载荷作用下超静定等强度梁的体积优化设计[J].曲靖师范学院学报,2005,24(6):78-80.

[4] 陈骥.刚结构稳定理论与设计计[M].北京:科学出版社,2001.

[5] 叶开沅.非均匀变厚度弹性体力学若干问题的一般解Ⅵ[J].兰州大学学报,1979,15(1):133-157.

[6] 徐云燕,李从林,刘振奎.结构优化分析的实用算法[J].甘肃科学学报,2000,12(1):43-47.

[7] 梁斌.弹性圆柱壳的刚度最优化设计[D].兰州:兰州大学力学系,1988.

[8] 李清禄,项长生.集中载荷作用下超静定等强度梁的抗弯刚度优化设计学报[J].甘肃科学学报,2006,18(2):91-93.

[9] 何光渝.Fortran 算法手册[M].北京:科学出版社,1993.

作者简介:

项长生(1976-)男,安徽省望江人,2004 年获兰州理工大学结构工程硕士学位,现任兰州理工大学土木工程学院讲师,主要研究方向为道路与桥梁工程.