文章编号：1673-5196(2008)04-0159-02

多循环半群的置换性质

田振际，江　洪，王亚伟

(兰州理工大学 理学院，甘肃 兰州 730050)

摘要：研究多循环半群，讨论多循环半群的置换性质，用完全归纳法证明当 $n\geqslant 3$ 时，多循环半群有置换性质 P_n.

关键词：半群；多循环半群；置换性质

中图分类号：O152.7　　**文献标识码**：A

Permutation property of polycyclic semigroup

TIAN Zhen-ji, JIANG Hong, WANG Ya-wei

(School of Science, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou 730050, China)

Abstract: Polycyclic semigroup was investigated, the permutation property of the polycyclic semigroup was discussed, and it was proved by means of full-inductive method that polycyclic semigroup has permutation property P_n, $n\geqslant 3$.

Key words: semigroup; polycyclic semigroup; permutation property

1　预备知识

设 S 是一个半群，n 是一个正整数($n\geqslant 3$).称 S 具有置换性质 P_n，如果对 S 中的任意 n 个元素 x_1，x_2，…，x_n，都存在{1，2，…，n}上的两个不同的置换 δ,τ 使得 $x_{\delta(1)}x_{\delta(2)}\cdots x_{\delta(n)}=x_{\tau(1)}x_{\tau(2)}\cdots x_{\tau(n)}$ [1].

多循环半群是由 n 个元生成且带有零元的幺半群：

$$P_n=\langle p_1,p_2,\cdots p_n,p_1^{-1},p_2^{-1}\cdots p_n^{-1}:\ p_ip_i^{-1}=1,p_ip_j^{-1}=0,i\neq j\rangle$$

当 $n=1$ 时，P_n 是双循环半群.对 $\forall\,\omega=x_1x_2\cdots x_n\in\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}^*$，有 $\omega^{-1}=x_n^{-1}\cdots x_2^{-1}x_1^{-1}$.对 P_n 的每个非零元，都可以写成形式 $u^{-1}v$，其中 $u,v\in\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}^*$.且 P_n 的乘法如下：

$$(u_1^{-1}v_1)(u_2^{-1}v_2)=\begin{cases}u_1^{-1}\omega v_2 & \text{若 } v_1=\omega u_2 \text{ 对某个 } \omega\in\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}^*\\ u_1^{-1}\omega^{-1}v_2 & \text{若 } u_2=\omega v_1 \text{ 对某个 } \omega\in\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}^*\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

文献[2]证明双循环半群有置换性质 P_n，$n\geqslant 4$.以下研究多循环半群的置换性质.有关置换的知识见文献[2～6]，有关多循环半群的知识见文献[7，8].

2　主要结果

定理1　多循环半群 P_n 具有 P_3.即对 P_n 的任意三个元 $x_1=a^{-1}b$，$x_2=c^{-1}d$，$x_3=e^{-1}f$，其中 $a,b,c,d,e,f\in\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}^*$.

一定存在{1，2，3}上的两个不同的置换 δ,τ 使得 $x_{\delta(1)}x_{\delta(2)}x_{\delta(3)}=x_{\tau(1)}x_{\tau(2)}x_{\tau(3)}$.

引理1　对 P_n 的任意三个元 $x_1=a^{-1}b$，$x_2=c^{-1}d$，$x_3=e^{-1}f$，其中 $a,b,c,d,e,f\in\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}^*$.

若 x_1,x_2,x_3 中存在两个元之积为0时，则一定存在两个置换 δ,τ 使 $x_{\delta(1)}x_{\delta(2)}x_{\delta(3)}=x_{\tau(1)}x_{\tau(2)}x_{\tau(3)}$.

证明　不失一般性，令 $x_1x_2=0$，那么 $x_1x_2x_3=x_3x_1x_2=0$.

以下引理中出现的 x_1,x_2,x_3 与 a,b,c,d,e,f 和引理1中出现的相同.

引理2　若 x_1,x_2,x_3 中两两之积不为0，方程组(1)一定成立

$$b=nc\text{ 或 }c=nb$$
$$d=me\text{ 或 }e=md$$
$$b=le\text{ 或 }e=lb$$

收稿日期：2007-05-11
基金项目：甘肃省自然科学基金(ZS032-B25-020)
作者简介：田振际(1964-)，男，甘肃会宁人，博士，教授.

$$f = kc \text{ 或 } c = kf \tag{1}$$
$$f = ja \text{ 或 } a = jf$$
$$d = ia \text{ 或 } a = id$$

式中：$i, j, k, l, m, n \in \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}^*$.

证明 三个元素中任取两个的乘积共有 6 种：

$(a^{-1}b)(c^{-1}d)(e^{-1}f)$ $(a^{-1}b)(e^{-1}f)(c^{-1}d)$

$(e^{-1}f)(c^{-1}d)(a^{-1}b)$ $(e^{-1}f)(a^{-1}b)(c^{-1}d)$

$(c^{-1}d)(a^{-1}b)(e^{-1}f)$ $(c^{-1}d)(e^{-1}f)(a^{-1}b)$

所以由 P_n 中的乘法易得结论成立.

引理 3 对于引理 2 中的方程组(1)，有 3 种情形：

1) 若 $b = nc, c = kf$ 则 $b = nkf$.

2) 若 $b = nc, b = le$ 则 $e = n_1 c$ 或 $c = l_1 e$，其中，$n_1, l_1 \in \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}^*$.

3) 若 $b = nc, f = kc$ 则 b 和 f 不一定有关.

证明 由 $b, n, c, k, f, l, e \in \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}^*$ 易得结论成立.

引理 4 引理 2 中方程组(1)成立的情况下，在 a, b, c, d, e, f 中一定能找到一个元 y，使得 $\forall z = \{a, b, c, d, e, f\}$，都 $\exists u \in \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}^*$，使 $z = uy$.

证明 当方程组(1)成立只出现引理 3 的前两种情况时，结论易得. 如：$c = nb, c = kf, d = me, e = lb, f = ja, a = id$，根据引理 3，$f = n_1 b, d = lmb, e = lb, f = jime$. 即 b 是所要找的元. 由对称性，其它类似.

当方程组(1)成立出现引理 3 的第三种情况时，可讨论以下 3 种情况：

1) 只出现一对，如：$b = nc, f = kc, e = lb, e = md, d = ia, a = jf$. 则

$b = nc, f = kc, e = lnc, d = ijkc, a = jkc$，即 c 是所要找的元. 由对称性，其它类似.

2) 若出现两对，如：$b = nc, f = kc, b = le, d = me, a = id, a = jf$ 那么由引理 3 得：

$e = n_1 c$ 或 $c = l_1 e, d = i_1 f$ 或 $f = j_1 d$. 不失一般性，令 $c = l_1 e$，则 e 是所要找的元. 由对称性，其它类似.

3) 若出现三对，如：$b = nc, f = kc, b = le, d = me, d = ia, f = ja$ 那么由引理 3 得 $a = k_1 c$ 或 $c = j_1 a, e = n_1 c$ 或 $c = l_1 e, a = m_1 e$ 或 $e = i_1 a$. 不失一般性，令 $a = k_1 c, c = l_1 e$，则 e 是所要找的元. 由对称性，其它类似.

下面证明定理 1.

1) 若 b 是引理 4 中所找到的元，那么通过计算六种乘法得：存在两个不同的置换 δ, τ 使

$$x_{\delta(1)} x_{\delta(2)} x_{\delta(3)} = x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} x_{\tau(3)}$$

其中 $a, b, c, d, e, f \in \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}^*$. 由对称性得 d, f 类似.

2) 若 a 是引理 4 中所找到的元，那么通过计算六种乘法得：存在两个不同的置换 δ, τ 使

$$x_{\delta(1)} x_{\delta(2)} x_{\delta(3)} = x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} x_{\tau(3)}$$

其中 $a, b, c, d, e, f \in \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}^*$. 由对称性得 c, e 类似.

定理 2 多循环半群 P_n 具有 P_n，$n \geqslant 3$.

证明 对 n 作数学归纳法. $n = 3$ 时，结论已证. 假设结论对 $n-1$ 已经成立，下证对 n 也成立.

$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in P_n$，由假设知，存在 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 上的两个不同的置换 δ, τ 使得 $x_{\delta(1)} x_{\delta(2)} \cdots x_{\delta(n-1)} = x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} \cdots x_{\tau(n-1)}$. 下面定义 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 上的两个置换 δ^* 和 τ^* 如下：

$$\delta^*_{(1)} = \delta_{(1)}, \delta^*_{(2)} = \delta_{(2)}, \cdots, \delta^*_{(n-1)} = \delta_{(n-1)}, \delta^*_{(n)} = n$$
$$\tau^*_{(1)} = \tau_{(1)}, \tau^*_{(2)} = \tau_{(2)}, \cdots, \tau^*_{(n-1)} = \tau_{(n-1)}, \tau^*_{(n)} = n$$

则有 $x_{\delta^*_{(1)}} x_{\delta^*_{(2)}} \cdots x_{\delta^*_{(n)}} = x_{\tau^*_{(1)}} x_{\tau^*_{(2)}} \cdots x_{\tau^*_{(n)}}$.

参考文献：

[1] HOWIE J M. Fundamentals of semigroup theory [M]. Berlin: Academic-Verlag, 1977.

[2] 周林芳，李 宝. 双循环半群的置换性质 [J]. 兰州大学学报：自然科学版，2000，36(2)：1-5.

[3] ANDRZEJ K. Permutation class of a semigroup [J]. Journal of Algebra, 2002, 26: 295-310.

[4] PETRICH M. Inverse semigroup [M]. New York: Inc, 1984.

[5] 石永芳，侍爱玲. 毕竟纯整半群上的矩形群同余 [J]. 兰州理工大学学报，2006，32(2)：154-157.

[6] 田振际，王 宇，金颖勤. 几类特殊半群与理想 [J]. 兰州理工大学学报，2007，33(1)：146-147.

[7] VESNA K. Coset decomposition of positively self-conjugate inverse submonoids of polycyclic monoids [J]. Semigroup Forum, 2003, 66: 151-161.

[8] 蒋启芬，喻秉均. 一类广义双循环半群 [J]. 四川师范大学学报：自然科学版，1999，22(1)：17-23.