DOI:10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2008.03.009
第20卷 第3期 2008年9月
甘肃科学学报 Journal of Gansu Sciences
Vol.20 No.3 Sep.2008

复合风险组合中有关理赔总额分布的分析

鹿艳锦,黎锁平
(兰州理工大学 运筹与控制研究所,甘肃 兰州 730050)

摘 要: 针对短期个别风险模型和长期聚合风险模型的理赔总额分布性质及特征作了较深入的分析,研究了混合型随机变量和的概率分布和短期个别风险模型理赔总额的统计特征;在复合分布框架下解析了聚合风险模型理赔总额和个别理赔额之间的分布关系,给出了个别理赔额分布的实用计算方法及理赔总额近似分布,所给方法是原有方法的推进.

关键词: 理赔总额;复合风险模型;复合Poisson分布;复合负二项分布
中图分类号: O141.4 **文献标识码**: A **文章编号**:1004-0366(2008)03-0027-04

On the Distribution of Aggregate Claims in Compound Risk Model

LU Yan-jin,LI Suo-ping
(*Institute of Operations Research and Control Science;Lanzhou University of Science and Technology,Lanzhou 730050,China*)

Abstract: We have made a further research on the nature and distributions of individual risk models and compound models,the probability distribution of the mixed stochastic variables,and the statistical features of the short-term individual risk models. Also the relationships between the total amount of compound compensation and the amount of individual compensation are investigated under the conditions of compound distributions. At last a more practical calculation method is given for the individual risk model and the approximate distribution of its compensation.

Key words: aggregate claim size;compound risk model;compound Poisson distribution;compound binomial ditribution

目前有关讨论风险模型中所涉及的同类型随机变量和的分布的文献较多[1~5],也研究了由此产生的控制问题[6~8].如文献[2,3]主要介绍并应用了多个随机变量和的卷积公式,文献[4,5]给出了一个离散型随机变量和一个连续型随机变量和的概率分布的例子和求法.我们对保险中的短期个别风险模型和长期聚合风险模型通常涉及到的理赔总额的分布进行了分析,给出了理赔总额的一系列分布性质和相关的计算方法,所提供的一些思路和性质有助于对保险风险组合模型的进一步理解和应用.

1 短期个别风险模型理赔总额的分布

一般文献中给出了2个离散型或2个连续型随机变量和的分布,但在保险中常遇到的是混合型随机变量的和,对此有以下结果和应用.

定理1 设随机变量 $Z=IX+(1-I)Y$,其中 I 是独立于 X、Y 的服从参数为 p 的Bernoulli随机变量,X 是离散型随机变量,Y 是连续型随机变量,则混合型随机变量 Z 的分布为

$$F_Z(z)=pF_X(z)+(1-p)F_Y(z),\text{且 } EZ=pE[X]+(1-p)E[Y].$$

收稿日期:2007-12-11
基金项目:兰州理工大学优秀中青年教师基金(Q200106);兰州理工大学学生科技创新基金资助.

当 $P\left\{I=\frac{1}{2}\right\}=1$,即 I 为一点分布时又有 $F_Z(z)=\sum_{k=1}^{\infty}p(x_k)F_Y(2z-x_k)$.

证明 当 I 是独立于 X,Y 的服从参数为 p 的 Bernoulli 随机变量时,

$$F(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{Z\leqslant z,I=1\}+P\{Z\leqslant z,I=0\}=P\{X\leqslant z\}P\{I=1\}+P\{Y\leqslant z\}P\{I=0\}=pF_X(z)+(1-p)F_Y(z),$$

并且

$$EZ=E[IX+(1-I)Y]=E[I]E[X]+(1-E[I])E[Y]=pE[X]+(1-p)E[Y].$$

当 I 服从一点分布时,

$$F(Z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant 2z\}=P\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty}X=x_k,Y\leqslant 2z-x_k\right\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=x_k,Y\leqslant 2z-x_k\}=\sum_{k=1}^{\infty}p(x_k)F_Y(2z-x_k),$$

从而定理得证.

推论1 设短期个别风险模型 $S=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 中某险种的理赔额为随机变量 B,用 X_i 表示第 i 张保单可能发生的索赔额,$X_i(1,2,\cdots,n)$ 为独立同分布的随机变量,并且每张保单以概率 p 最多发生一次理赔.则对索赔总额 $S=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 有 $E[S]=npE[B]$,$Var[S]=np\{(1-p)E^2B+Var[B]\}$.

证明 令随机变量 $I_i=\begin{cases}1,\text{第 } i \text{ 张保单发生理赔}\\0,\text{第 } i \text{ 张保单不发生理赔}\end{cases}$,则 $P\{I_i=1\}=p$,$P\{I_i=0\}=1-p$,即 I_i 为独立同分布的 Bernoulli 随机变量($i=1,2,\cdots,n$),并且 $X_i=I_iB$.则由定理1有

$$ES=E[\sum_{i=1}^{n}X_i]=nEX_i=nE[I_iB]=nE[E(B\mid I_i)]=nE[I_i\cdot E(B)]=nE[I_i]E[B]=npE[B],$$

$$Var\ S=Var[\sum_{i=1}^{n}X_i]=nVar[X_i]=nVar[I_iB]=n\{Var[E[B\mid I_i]]+E[Var[B\mid I_i]]\}=n\{Var[I_i\cdot E(B)]+E[I_i\cdot Var(B)]\}=n\{E^2B\cdot Var[I_i]+E[I_i]\cdot Var[B]\}=np\{(1-p)E^2B+Var[B]\},$$

证毕.

2 聚合风险模型理赔总额的分布

与短期个别风险模型不同,聚合风险模型保险期内理赔总额 $S_N=\sum_{i=1}^{N}X_i$ 中反映保单发生理赔的次数 N 为随机变量.第 i 次可能发生的理赔额 $X_i(i=1,2,\cdots,N)$ 对不同的 i 是独立同分布的,并与 N 独立.

引理1 设聚合风险理赔总额 $S_N=\sum_{i=1}^{N}X_i$ 中 $X_1,\cdots,X_N$ 独立同分布,N 是随机变量且与 $X_i(i=1,2,\cdots,N)$ 相互独立,则 S_N 的矩母函数 $M_{S_N}(t)=M_N[\ln M_X(t)]$,其中 $M_X(t)$ 为 X_i 共同的矩母函数.

证明参见文献[1].

在引理1的条件下,若 N 是服从参数为 λ 的泊松分布,则称 S_N 为服从参数为 λ 的复合泊松分布,由引理知其矩母函数为 $M_{S_N}(t)=e^{\lambda(M_X(t)-1)}$.

定理2 设聚合风险中 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 是一系列相互独立的服从参数为 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的复合泊松分布,即 $S_i=\sum_{j=1}^{N_i}X_j(i=1,2,\cdots,m)$,$N_i$ 是服从参数为 λ_i 的泊松分布,$X_j(j=1,2,\cdots,N_m)$ 独立同分布.$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 m 个不同的正数.则总理赔额 $S=\sum_{i=1}^{m}\alpha_iS_i$ 是服从参数为 $\lambda=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i$ 的复合泊松分布.

证明 $S_i=\sum_{j=1}^{N_i}X_j$,由于 $X_j(j=1,2,\cdots,N_i)$ 是独立同分布的,故可设它们共同的矩母函数为 $M_{X_i}(t)$,

从而由引理知 $M_{S_i}(t)=e^{\lambda_i(M_{X_i}(t)-1)}$. 由于 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 相互独立,再由矩母函数的性质

$$M_S(t)=E[e^{tS}]=E[e^{t(a_1S_1+a_2S_2+\cdots+a_mS_m)}]=E[e^{ta_1S_1}]E[e^{ta_2S_2}]\cdots E[e^{ta_mS_m}]=$$

$$\prod_{i=1}^{m}(M_{S_i}(a_it))=\prod_{i=1}^{m}e^{\lambda_i(M_{X_i}(a_it)-1)}=e^{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(M_{X_i}(a_it)-1)}=e^{\lambda\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{\lambda}(M_{X_i}(a_it)-1)\right)},$$

由矩母函数与分布函数一一对应的性质可得,S 服从参数为 $\lambda=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i$ 的复合泊松分布.

定理2对聚合风险的保险建模有重要的意义. 当我们考虑多个保单组合的情况时,如果这些组合之间相互独立,且每个组合的理赔可以用复合泊松分布描述,那么这些保单组合的总理赔额仍然可以用复合泊松分布来描述. 对于同一保单不同理赔额的组合,我们有

定理3　设理赔总额 S 是服从参数为 λ 的复合泊松分布,取值为 $x_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的个别理赔额其发生的概率为 $p_i(i=1,2,\cdots,m)$,其发生次数为随机变量 $N_i(i=1,2,\cdots,m)$. 则该保单的理赔总额 $S=x_1N_1+x_2N_2+\cdots+x_mN_m$,并且 $N_i(i=1,2,\cdots,m)$ 服从参数为 $\lambda_i=\lambda p_i$ 的泊松分布,

$$E[N_i]=\lambda_i=\lambda p_i(i=1,2,\cdots,m).$$

证明　首先易见 $S=x_1N_1+x_2N_2+\cdots+x_mN_m$,则

$$M_S(t)=E[e^{tS}]=E[e^{t\sum_{i=1}^{m}x_iN_i}]=E[e^{\sum_{i=1}^{m}t_iN_i}](\text{令 } t_i=t\cdot x_i)=\sum_{n=0}^{+\infty}E[e^{\sum_{i=1}^{m}t_iN_i}\mid N=n]\cdot P\{N=n\}=$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(p_1e^{t_1}+p_2e^{t_2}+\cdots+p_me^{t_m})^n\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}=e^{-\lambda}e^{\lambda\sum_{i=1}^{m}p_ie^{t_i}}=e^{\sum_{i=1}^{m}\lambda p_i(e^{t_i}-1)}=\prod_{i=1}^{m}e^{\lambda p_i(e^{t_i}-1)}=\prod_{i=1}^{m}M_{N_i}(t),$$

从而取值为 x_i 的个别理赔额其发生次数 N_i 服从参数为 $\lambda_i=\lambda p_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的泊松分布.

定理3说明了若理赔总额服从复合泊松分布,则它可以分解成理赔次数服从泊松分布的所有单个理赔额的和. 定理2和定理3说明了理赔总额和单个理赔额之间的相互转化关系,由此可以更好的研究聚合风险的理赔额分布,并对整个保险组合的结构有更明确的认识.

推论2　设某保险组合的理赔总额 S 服从参数为 λ 的复合泊松分布,其纯保费为 a_1,理赔总额 S 的各阶矩满足 $E[(S-ES)^k]=a_k(k=2,\cdots,m)$;并设个别理赔额的分布为 $P\{X=x_k\}=p_k(k=1,2,\cdots,m)$. 则该保险组合中个别理赔额的发生次数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是线性方程组 $\sum_{i=1}^{m}x_i^k\lambda_i=a_k(k=1,2,\cdots,m)$ 的解,并且个别理赔额的分布

$$p_k=\lambda_k/\sum_{k=1}^{m}\lambda_k,(k=1,2,\cdots,m).$$

证明　设该保单组合发生的总理赔次数为随机变量 N,X 为该保单组合的理赔额随机变量,则由理赔总额 S 服从参数为 λ 的复合泊松分布及其满足的条件可得

$$a_1=ES=EN\cdot EX=\lambda\cdot EX,$$

$$a_k=E[(S-ES)^k]=(\ln M_{S_N}(t))^{(k)}\mid_{t=0}=(\ln e^{\lambda(M_x(t)-1)})^{(k)}\mid_{t=0}=\lambda\cdot EX^k,(k=2,\cdots,m)$$

两式合写即 $\lambda\cdot EX^k=a_k(k=1,2,\cdots m)$. 又由个别理赔额的分布 $P\{X=x_k\}=p_k(k=1,2,\cdots,m)$ 可得

$$EX^k=\sum_{i=1}^{m}x_i^kp_i,(k=1,2,\cdots,m)$$

代入后即得方程组

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda(x_i^kp_i)=a_k,(k=1,2,\cdots,m).$$

由定理3的结论 $\lambda p_k=\lambda_k(k=1,2,\cdots,m)$. 因此,方程组又可化为

$$\sum_{i=1}^{m}x_i^k\lambda_i=a_k,(k=1,2,\cdots,m)$$

即个别理赔额的发生次数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是线性方程组 $\sum_{i=1}^{m}x_i^k\lambda_i=a_k(k=1,2,\cdots,m)$ 的解. 考虑到 $\lambda p_k=\lambda_k$(k

$=1,2,\cdots,m)$ 及 $\sum_{k=1}^{m} p_k=1$，则个别理赔额的分布 $p_k=\lambda_k/\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(k=1,2,\cdots,m)$，并且 $\lambda=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k$.
证毕.

由于推论2中线性方程组的系数行列式可化为范得蒙行列式计算，故这一结果很有实际意义.为了更清楚地研究聚合风险模型中理赔总额服从复合泊松分布风险模型，给出其的近似分布.

定理4 设聚合风险理赔总额 $S_N=\sum_{i=1}^{N} X_i$ 服从参数为 λ 的复合泊松分布，$X_1,\cdots,X_N$ 独立同分布，并与 N 独立. $E[X_i]=\mu<+\infty$，$Var[X_i]=\sigma^2<+\infty$，则

$$\lim_{\lambda\to\infty} P\left\{\frac{S-\lambda\mu}{\sqrt{\lambda(\sigma^2+\mu^2)}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)，其中\ E(S)=\lambda\mu, Var(S)=\lambda(\sigma^2+\mu^2).$$

证明 令 $S^*=\dfrac{S-\lambda\mu}{\sqrt{\lambda(\sigma^2+\mu^2)}}$，由矩母函数的性质得

$$\ln M_{S^*}(t)=-\frac{\lambda\mu t}{\sqrt{\lambda(\mu^2+\sigma^2)}}+\lambda\left[1+\frac{\mu}{1!}\frac{t}{\sqrt{\lambda(\mu^2+\sigma^2)}}+\frac{\mu^2+\sigma^2}{2!}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda(\mu^2+\sigma^2)}}\right)^2+o\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda(\mu^2+\sigma^2)}}\right)^2-1\right]=$$

$$\lambda\frac{\mu^2+\sigma^2}{2}\frac{t^2}{\lambda(\mu^2+\sigma^2)}+o\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{1}{2}t^2+o\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

故 $\lim_{\lambda\to\infty} M_{S^*}(t)=e^{\frac{t^2}{2}}$，又矩母函数 $e^{\frac{t^2}{2}}$ 对应的分布函数为 $N(0,1)$，从而结论得证.

3 结束语

通过采用矩母函数的方法对短期个别风险模型和长期聚合风险模型理赔总量的分布进行了详细的讨论，所得结果为保险实务中的保费的收取和破产概率的分析计算提供了思路，具有一定的指导作用和现实意义.

参考文献：

[1] 江涛，苏淳，唐启鹤.I.I.D.随机变量部分和之随机和的极限定理[J].中国科学技术大学学报，2001，36(4)：19-24.
[2] 高敬振.关于全概率公式与随机个随机变量之和[J].山东师范大学学报，2005，20(4)：91-93.
[3] 郭鹏江，张海.随机变量和的分布[J].西北大学学报，2005，5(1)：1-2.
[4] 潘伟珍.逻辑函数XOS展开式和RM展开式的转换[J].甘肃科学学报，2006，18(3)：94-96.
[5] 邱国新，冯胜章.齐次Poisson冲击模型中元件寿命的随机比较[J].甘肃科学学报，2007，19(1)：47-50.
[6] Li Suo-ping，Li Jun.Stochastic Optimal Control of Liquidity Effects Based on Wiener-process[J]. International Journal of Applied Mathematics，2004，15(2)：117-127.
[7] Li Suo-ping，Liu Kun-hui.Probability-significance in Fuzzy System and Its Analysis Methods[J].Information-An International Journal，2003，6(2)：139-144.
[8] 黎锁平，杨海波.费用结构一般化的"跳-停"奇异型随机控制[J].工程数学学报，2005，22(4)：673-678.

作者简介：

鹿艳锦 (1981-)女，江苏省徐州人，兰州理工大学运筹与控制研究所2006级硕士研究生.主要研究方向为风险数学理论与模型.