DOI:10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2009.02.009
第21卷 第2期 甘肃科学学报 Vol.21 No.2
2009年6月 Journal of Gansu Sciences Jun.2009

E^-逆半群上的同余

王海军,李小光,田振际
(兰州理工大学 理学院,甘肃 兰州 730050)

摘 要: 研究同余是研究半群的一种最常用的方法,以下主要通过定义正规同余和正规子半群来构造矩形同余对,从而研究 E^-逆半群上的矩形群同余.

关键词: 正规同余;正规子半群;矩形同余对;矩形群同余
中图分类号: O152.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-0366(2009)02-0023-03

Congruences on an E^-inversive Semigroup

WANG Hai-jun, LI Xiao-guang, TIAN Zhen-ji
(*School of Sciences, Lanzhou University of Science and Technology, Lanzhou* 730050, *China*)

Abstract: Studying congruences is the best way of studying semigroups. By defining normal congruences and normal subsemigroup, the rectangular congruence pair is constructed to investigate the rectangular group congruences on E^-inversive semigroup.

Key words: normal congruence; normal subsemigroup; rectangular congruence pair; rectangular group congruence

半群 S 被称为 E^- 逆半群[1],若对于任意 $a\in S$,都存在 $x\in S$,使得 ax 是幂等元.显然毕竟正则半群特别是正则半群都是 E^- 逆半群.近年来,毕竟正则半群的代数结构及其同余理论引起许多同行的极大关注[1~4].目前,E^- 逆半群已成为半群领域里的一个重要分枝.

1 预备知识

首先 Mitsch.Petrich 给出了 E^- 逆半群的基本性质,继而研究了 E^- 逆半群的子直积[5,6],Zheng 刻画了群同余[7],文献[8]用正则同余对刻画 E^- 逆半群的正则同余,Weipoltshamer 描述了 E^- 逆 E^- 逆半群上的几种特殊的同余[9],有最小群同余,半格同余,幂等原分离同余等等.以下主要研究 E^- 逆半群上的矩形群同余.

称 y 是 a 的弱逆元,若 $a\in S$, $y\in S$,使得 $yay=y$.用 $W(a)$ 表示 a 的所有弱逆元的集合.设半群 S 为 E^- 逆半群,用 E_s 表示 S 的幂等元集合.半群 S 称为矩形群,若 S 是正则半群,且 E_s 是矩形带.半群 S 上的同余 η 称为矩形群同余,若 S/η 是矩形群.称 E^- 逆半群 S 上的同余 θ 是正则的,若对于任意 $a\in S$,存在 $a'\in W(a)$,有 $a\theta aa'a$.

设 S 是 E^- 逆半群,$e,f\in E_s$,记

$$M(e,f)=\{g\in E_s \mid ge=g=fg\},\ S(e,f)=\{g\in M(e,f) \mid egf=ef\},$$

称 $S(e,f)$ 为 E^- 逆半群 S 的中间集.

设 S 是 E^- 逆半群,S 的子半群 K 称为正规的,若

(1) $a\in K$, $a'\in W(a)\Rightarrow a'\in K$;

(2) $E_s\subseteq K$;

收稿日期:2008-11-21

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(3) $a \in K, a' \in W(a) \Rightarrow aKa', a'Ka \subseteq K$.

设 S 是 E^- 逆半群，且 E_s 是 S 的子半群，称 E_s 上的同余 ε 为 S 上的正规同余，若 $x, y \in E_s$，存在 $a \in S, a' \in W(a)$，有 $axa', aya', a'xa, a'ya \in E_s$. 使得 $x \varepsilon y \Rightarrow axa' \varepsilon aya', a'xa \varepsilon a'ya$.

设 S 是 E^- 逆半群，ε 是 S 上的正规同余，且 E_s/ε 是矩形带，K 是 S 的正规子半群，称 (ε, K) 为 S 的矩形同余对，若满足：

(1) 对于任意 $a \in S, a' \in W(a)$，存在 $a'' \in W(a)$，$aa''aa' \varepsilon aa', a'aa''a \varepsilon a'a$；

(2) 对于任意 $a \in S, x \in E_s$. $xa \in K \Rightarrow a \in K$.

设 S 为 E^- 逆半群，$a \in S$，则存在 $x \in S$，使 $as \in E_s$，于是 $xax \cdot a \cdot xax = xax$，因此 $xax \in W(a)$，故 $W(a) \neq$. 显然，对 $a' \in W(a)$，有 $aa', a'a \in E_s$.

设 S 是 E^- 逆半群，E_s 是 S 的子半群. 则对任意 $x \in E_s, y \in W(x)$，有 $xy, yx \in E_s$，而 $yx \cdot xy = yxy = y$，于是 $y \in E_s$，故 $W(x) \subseteq E_s$.

设 S 是 E^- 逆半群，ρ 是 S 上的同余，如果 $b\rho \in W(a\rho)$，则存在 $a' \in W(a)$，使得 $a'\rho b$，若 $e, f \in E_s, e\rho f$，则存在 $g \in S(e, f)$，使得 $e\rho g \rho f$ [8].

设 S 是 E^- 逆半群，θ 是 S 上的正则同余，若 $b\theta$ 是 S/θ 的幂等元，则在 S 中一定存在幂等元 e，使得 $a\theta e$[8].

2 主要结果

设 S 为 E^- 逆半群，ε 是正规同余，K 是正规子半群，在 S 上定义 1 个二元关系如下：

$$a \rho b \Leftrightarrow \begin{cases} \text{对于任意 } a' \in W(a). \text{存在 } b' \in W(b) \text{ 有 } a'b \in K, a'a \varepsilon b'b. aa' \varepsilon bb' \\ \text{对于任意 } b' \in W(b). \text{存在 } a' \in W(a) \text{ 有 } b'a \in K, aa' \varepsilon bb', a'a \varepsilon b'b. \end{cases}$$

引理 1 设 (ε, K) 是矩形同余对，且对于任意 $a, b \in S$. 对于任意 $x \in E_s$，如果 $ab \in K$，则 $ba, axb \in K$.

证明 设对于任意 $ab \in K, a, b \in S$，则由 K 是正规子半群知，$a'aba \in K$. 又 S 是 E^- 逆半群，故存在 $a' \in W(a)$，有 $a'a \in E_s$，故 $ba \in K$. 又 $x \in E_s$，K 是正规子半群，所以 $bax \in K$，故存在 $b' \in W(b)$，有 $b'baxb \in K$，又 $b'b \in E_s$，故 $axb \in K$. 证毕.

引理 2 若 (ε, K) 是矩形同余对，则 ρ 是 S 上的等价.

证明 显然 ρ 满足对称性，又 $E_s \subseteq K$ 及 ε 是自反的，故 ρ 自反的，下证 ρ 满足传递性.

设 $a\rho b, b\rho c$，则对于任意 $a' \in W(a)$，存在 $b'' \in W(b)$，有 $a'b \in K, aa' \varepsilon bb'', a'a \varepsilon b''b$；则由 ε 的定义知，对于任意 $b' \in W(b)$，存在 $c' \in W(c)$，有 $b'c \in K, bb' \varepsilon cc', b'b \varepsilon c'c$. 又由 ε 的传递性，可得，$aa' \varepsilon cc', a'a \varepsilon c'c$，令 $g \in M(aa', bb')$，则有 $gaa' = g = bb'g$，故

$$(b'ga)a'b(b'ga) = b'b \varepsilon c'c(gaa')(bb'g)a = b'gga = b'ga,$$

即 $b'ga \in W(a'b)$.

又 $a'b \in K$，故由正规子半群的定义知，$b'ga \in K$，所以 $a'b \cdot b'ga \in E_s$. $a'(bb'g)a \in E_s \subseteq K$. $gaa' \in E_s$，则由引理 1 知 $a'bb'(gaa')c \in K$. 即 $a'bb'ga \cdot a'c \in K$，得 $a'c \in K$.

另一方面，同理可知对于任意 $c' \in W(c)$，存在 $a' \in W(a)$，使得 $c'a \in K, aa' \varepsilon cc', a'a \varepsilon c'c$，故 $a\rho b$.

因此 ρ 是 S 的等价. 证毕.

引理 3 若 (ε, K) 是矩形同余对，则 ρ 是 S 上的同余.

证明 先证 ρ 是左相容的，设 $a\rho b, a, b \in S$，对于任意 $(ca)' \in W(ca)$，有 $(ca)'ca(ca)' = (ca)'$，又 $(ca)'ca(ca)'c = (ca)'(ca)(ca)'c = (ca)'c$，故 $(ca)'c \in W(a)$. 不妨令 $a' = (ca)'c$.

又 $a(ca)'ca(ca)' = a(ca)'$，即 $a(ca)' \in W(c)$，故令 $c' = a(ca)'$，于是就有

$$a'c' = (ca)'ca(ca)' = (ca)', aa' = a(ca)'c = c'c = c'c.$$

又 $a\rho b$，故 $(ca)'cb = a'b \in K$，

又由 ρ 的定义知，存在 $b' \in W(b)$，使得 $aa' \varepsilon bb', a'a \varepsilon b'b$，

令 $g \in S(aa', bb') = S(c'c, bb')$，则 $c'c = aa' \varepsilon g \varepsilon bb', (b'gc')cb(b'gc') = b'ggc' = b'gc'$，

故 $b'gc' \in W(cb)$.

令 $(cb)' = b'gc' \in W(cb)$，

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

因此 $ca(ca)' = caa'c'\varepsilon cbb'c'\varepsilon cbb'bb'c'\varepsilon cbb'gc' = cb(b'gc') = cb(cb)'$.

又 $(cb(a'a)\varepsilon EW((a''a)\varepsilon))'(cb) = b'gc'cb = b'gb\varepsilon b'bb'b = b'b\varepsilon a'a = a'aa'a = a'cc'a = (ca)'ca$,

同理可得：对于任意 $(cb)' \in W(cb)$，存在 $(ca)'' \in W(ca)$，

使得 $(cb)'(ca) \in K$，$(ca)(ca)''\varepsilon(cb)(cb)'$，$(ca)''(ca)\varepsilon(cb)'(cb)$，即 $ca\rho cb$，

又由引理知 ρ 是 S 上的等价，故 ρ 是 S 上的同余. 证毕.

定理 1　若 (ε, K) 是矩形同余对，则 ρ 是 S 上的矩形群同余.

证明　对于任意 $a \in S$，$a' \in W(a)$，存在 $a'' \in W(a)$，由定义知，$a'aa''a \in K$，故

$$a'(aa''aa')a\varepsilon a'(aa')a = a'a, \text{即}(a'a)\varepsilon \in W((a''a)\varepsilon).$$

于是有

$$(a''a) \in W((a''a) \cap E_s.(a''a)'\varepsilon a'a,$$

又

$$(a''a)'a'(aa''a)(aa)'a'\rho(a''a)'(a''a)'a''a(a''a)a' = (a''a)'(a''a)'a' = (a''a)'a',$$

即 $((a''a)'a')\rho \in W((aa''a)\rho)$. 故存在 $(aa''a)' \in W(aa''a)$，使得 $(aa''a)'\rho(a''a)'a'$，则

$$aa''a(aa''a)'\rho aa''a(a''a)'a'\rho aa''a'aa' = aa''aa'\varepsilon aa',$$

即 $aa''a(aa''a)'\varepsilon aa''aa'\varepsilon aa'$，且

$$(aa''a)aa''a\rho(a''a)'aa''a\rho a'aa''a = a'aa''a\varepsilon a'a,$$

即 $(aa''a)'aa''a\varepsilon a'aa''a\varepsilon a'a$.

另外，令 $c \in W(aa''a)$，则有 $caa''ac = c$. 故 $(ca)a''a(ca) = (caa''ac)a = ca$，故 $ca \in W(a''a)$，又 $(ac)a''a(ac) = (acaa''a)c = ac$. 故 $ac \in W(aa'')$. 于是 $caa''a(ca)caa''a\varepsilon caa''a$，即 $(caa''a)\varepsilon \in W((ca)\varepsilon)$，于是存在 $x \in W(ca)$. 有 $x\varepsilon caa''a$. 并且有 $xcax = x$，于是 $(xc)a(xc) = (xcax)c = xc$. 故 $xc \in W(a)$，不妨令 $a' = xc$，则 $a' \in W(a)$，$a(xc)\varepsilon aa''axc\varepsilon aa''acaa''ac\varepsilon aa''ac$. 同理可得 $xca\varepsilon c(aa''a)$. 因此 $a\rho aa''a$. ρ 是 S 上的正则同余.

设 $a\rho, b\rho \in E(S/\rho)$，其中 $a, b \in S$，则存在 $e, f \in E_s$，有 $a\rho e, b\rho f$，又 E_s/ε 是矩形带，故 $efe\rho e$，则 $(aba)\rho = a\rho$，即 S/ρ 是矩形带，因而 ρ 是 S 上的矩形群同余. 证毕.

参考文献：

[1] Edwards P M. Eventually regular semigroups[J]. Bull Austral Math Soc., 1983, 28: 23-38.

[2] 喻秉钧. 毕竟正则半群的结构[J]. 中国科学, 1990, 11(A 辑): 1 159-1 161.

[3] Ren X M. Guo Y Q. Regular Semigroups and Its Generaliztion[J]. Lecture Series8(Pure Applied Math). Marce 11 Dekker NC, 1996, 6: 181-225.

[4] 江洪，田振际，王亚伟. 一类分循环半群的研究[J]. 甘肃科学学报, 2008, 20(2): 30-32.

[5] Mitsch H, Petrich M. Basic Properties of E-inversive Semigroups[J]. Commun. Algebra, 2000, 28(11): 5 169-5 182.

[6] Mitsch H. Subdirect Products of E-inversive Semigroups[J]. Aust. Math. Soc., 1990, 48: 66-78.

[7] Zheng H. Group Congruces on an E-inverse Semigroup[J]. Southeast Asian Bull. Math., 1997, 21: 1-8.

[8] 罗彦锋，李小玲. E-逆半群上的正则同余[J]. 半群论坛, 2008, 76: 107-123.

[9] Weipoltshamer B. Certain Congruences on E-inversive E-semigroups[J]. Semigroup Forum, 2002, 65: 233-248.

作者简介：

王海军 (1980-)男，黑龙江省哈尔滨市人，2006 年毕业于哈尔滨师范大学，现为兰州理工大学理学院应用数学专业在读研究生，主要研究方向为半群代数理论.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net