文章编号：1673-5196(2007)04-0135-03

Banach空间非线性常微分方程的正周期解

刘 旭[1]，靳伍银[2]，剡昌锋[2]

(1. 兰州交通大学 数理与软件工程学院，甘肃 兰州 730070；2. 兰州理工大学 机电工程学院，甘肃 兰州 730050)

摘要：在一定的序条件及非紧性测度条件下，通过非紧性测度的精细计算，运用凝聚映射的不动点指数理论获得有序Banach空间二阶常微分方程的正周期解的存在性.

关键词：周期边值问题；非紧性测度；凝聚映射；不动点指数

中图分类号：O157.8 **文献标识码**：A

Positive periodic solution of nonlinear ordinary differential equation in Banach spaces

LIU Xu[1], JIN Wu-yin[2], YAN Chang-feng[2]

(1. School of Mathematics, Physics and Software Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China; 2. College of Mechano-Electronic Engineering, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou 730050, China)

Abstract: Under the ordered conditions and noncompactness measure conditions, the existence of positive periodic solution for second-order ordinary differential equation in Banach space was proved by accurately calculating the measure of noncompactness and employing fixed-point index theorems of condensing map.

Key words: periodic boundary value problem; measure of noncompactness; condensing map; fixed point index

设E为有序Banach空间，P为正规锥，正规常数为N，考虑下列周期边值问题(简称PBVP)

$$\begin{cases} -u''(t)=f(t,u), & t\in I \\ u(0)=u(\omega),\ u'(0)=u'(\omega) \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性.式中：$I=[0,\omega]$，$f(t,u)\in C(I\times E,E)$且满足条件：

(P0) $\exists M>0$，使$f(t,x)\geqslant -Mx$，$\forall t\in I$，$x\geqslant\theta$.

关于抽象空间周期边值问题已有一些研究，参见文[1]与文[2].在无穷维空间中，非线性项$f(t,x)$关于x的连续性保证不了解的存在性.一般除$f(t,x)$的连续性，还要对f加上一定的条件.文[3]在R空间中利用锥映射的Krasnoselskii不动点定理获得半线性二阶常微分方程PBVP正解的存在性.文[4]在有序Banach空间中，利用凝聚锥映射的Krasnoselskii不动点定理讨论二阶常微分方程周期边值问题，对非线性项$f(t,x)$提出的极限条件不易检验，而本文提出较易检验的序条件(P0)，(P2)，(P3)或(P0)，(H2)，(H3)，在一定的非紧性测度条件下，通过非紧性测度的精细计算，运用凝聚映射的不动点指数理论获得问题(1)的正解的存在性，证明方法与文[3]和文[4]完全不同.特殊地$E=R^n$，即普通常微分方程组的情形，本文的结果也是新的.

1 预备知识

记$C(I,E)$为I上连续函数根据范数$\|u\|=\max\limits_{t\in I}\|u(t)\|$构成的Banach空间.对$\forall u\in C(I,E)$，令$f_1(u)=f(t,u(t))+Mu(t)$，作算子

$$Au=(T\circ f_1)u=\int_0^\omega G(t,s)[f(s,u)+Mu(s)]ds,\qquad t\in I \tag{2}$$

式中：$G(t,s)=$

$$\begin{cases} \dfrac{\cosh\beta(t-s-\omega/2)}{2\beta\sinh(\beta\omega)/2} & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant\omega \\ \dfrac{\cosh\beta(\omega+t-s-\omega/2)}{2\beta\sinh(\beta\omega)/2} & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant\omega \end{cases} \tag{3}$$

$\beta=\sqrt{M}$，则$A:C(I,E)\to C(I,E)$连续，易见$u\in$

收稿日期：2006-07-13
基金项目：国家自然科学基金(10572056)
作者简介：刘 旭(1971-)，男，甘肃平凉人，讲师.

$C(I,E)$为问题(1)解的充要条件是u为算子A的不动点，即$u=Au$. 当E为有限维空间时，T为紧算子，f_1为有界连续算子，从而A为全连续映射；但当E为无限维空间时，T非紧，A一般不再是全连续映射. 易见

$$K_0=\{\varphi\in C(I,E)\mid\varphi(t)\in P,\quad\forall t\in I\}$$

为$C(I,E)$中的闭凸锥，其正规常数亦为N. 在$C(I,E)$中取K_0的子锥

$$K=\{u\in C(I,E)\mid u(t)\geqslant\theta,\ u(t)\geqslant\delta u(s),\forall t,s\in I\}$$

式中：$\delta=\dfrac{1}{\cosh\frac{\beta\omega}{2}}$. 因为$\beta=\sqrt{M}>0$，所以$K\subset K_0$.

引理1 算子$A=T\circ f_1$映K入K，算子A：$K\to K$连续.

证明 设$u\in C(I,E)$，$u\geqslant\theta$根据条件(P0)有$f_1(u)\geqslant\theta$，由式(3)知：

$$\frac{1}{2\beta\sinh\frac{\beta\omega}{2}}\leqslant G(t,s)\leqslant\frac{\cosh\frac{\beta\omega}{2}}{2\beta\sinh\frac{\beta\omega}{2}},\quad t,s\in I\tag{4}$$

于是对$\forall\tau,s\in I$，由式(4)可得

$$(Au)(\tau)=T\circ f_1\leqslant\int_0^\omega G(\tau,s)f_1(u)\mathrm{d}s\leqslant\frac{\cosh\frac{\beta\omega}{2}}{2\beta\sinh\frac{\beta\omega}{2}}\int_0^\omega f_1(u)\mathrm{d}s$$

从而有

$$\int_0^\omega f_1(u)\mathrm{d}s\geqslant\frac{(Au)(\tau)}{\cosh\frac{\beta\omega}{2}\Big\backslash 2\beta\sinh\frac{\beta\omega}{2}}$$

另一方面

$$(Au)(t)=\int_0^\omega G(t,s)f_1(u)\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{2\beta\sinh\frac{\beta\omega}{2}}\int_0^\omega f_1(u)\mathrm{d}s\geqslant\frac{1}{\cosh\frac{\beta\omega}{2}}(Au)(\tau)\geqslant\delta(Au)(\tau)$$

因此A：$K\to K$连续.

引理2[5] 设E是Banach空间，P为E中的锥，$\Omega\subset P$为有界开集，A：$P\cap\bar{\Omega}\to P$为凝聚映射，若存在$u_0\in P\backslash\{\theta\}$，使

$$u-Au\neq\mu u_0,\ \forall u\in\partial\Omega,\ \mu\geqslant 0$$

则$i(A,P\cap\Omega,P)=0$.

引理3[6] 设E是Banach空间，P为E中的锥，$\Omega\subset P$为有界开集，$\theta\in\Omega$，A：$P\cap\bar{\Omega}\to P$为凝聚映射，使

$$u\neq\mu Au,\ \forall u\in\partial\Omega,\ 0<\mu\leqslant 1$$

则$i(A,P\cap\Omega,P)=1$.

记$T_l=\{x\in E\mid\|x\|<l\}(l>0)$，

$U_l=\{u\in C(I,E)\mid\|u\|<l\}(l>0)$

2 主要结果及证明

定理1 设E为有序Banach空间，P为其正规锥，正规常数为N，$f\in C(I\times E,E)$，把有界集映成有界集，且f满足(P0)及下列条件：

(P1) $\exists\,0<L<\dfrac{M}{2}$，对任意有界集$D\subset P\cap T_l$，有

$$\alpha(f_1(I,D))\leqslant L\alpha(D)$$

式中：$f_1(I,D)=\{f_1(t,u(t))=f(t,u(t))+Mu(t)\mid t\in I,u\in D\}$.

(P2) $\exists\,\varepsilon_1>0$及$r_1>0$，使

$$f(t,x)\leqslant-\varepsilon_1 x,\ \forall t\in I,\ x\in P,\ \|x\|\leqslant r_1$$

(P3) $\exists\,\varepsilon_2>0$及$b(t)\in C(I,P)$，使

$$f(t,x)\geqslant\varepsilon_2 x-b(t),\forall t\in I,\ x\in P$$

则PBVP(1)至少存在一个正解.

证明 因问题(1)的解等价于算子A的不动点，下面对算子A应用凝聚映射的不动点指数理论来讨论其不动点的存在性.

首先证A：$K\to K$为凝聚映射. 对任意有界集$B\subset K\cap U_l$，由f的有界性知$A(B)$等度连续. 根据文[7]之定理1.2有

$$\alpha(A(B))=\max_{t\in I}\alpha(A(B(t)))$$

$\forall u\in B,t\in I$，根据文[8]之引理3有

$$(Au)(t)=\int_0^\omega G(t,s)[f(s,u(s))+Mu(s)]\mathrm{d}s\in\int_0^\omega G(t,s)\mathrm{d}s\,\overline{co}\{f_1(s,u(s))\mid s\in I,u\in B\}\in\int_0^\omega G(t,s)\mathrm{d}s\,\overline{co}(f_1(I\times B(I)))$$

从而

$$\alpha(A(B(t)))\leqslant\int_0^\omega G(t,s)\mathrm{d}s\cdot\alpha(f_1(I\times B(I)))\leqslant\frac{1}{M}\cdot L\alpha(B(I))\leqslant\frac{2L}{M}\alpha(B)$$

两边取最大值，有

$$\alpha(A(B))\leqslant\frac{2L}{M}\alpha(B)$$

又$0<\dfrac{2L}{M}<1$，故A：$K\to K$为凝聚映射.

取$0<r<r_1$，下证

$$u \neq \lambda A u,\ \forall u \in \partial U_r \cap K,\ 0 < \lambda \leqslant 1 \quad (5)$$

若 $\exists u_0 = \lambda_0 A u_0$，则 u_0 满足微分方程

$$\begin{cases} -u_0''(t) + Mu_0 = \lambda[f(t,u_0) + Mu_0],\ t \in I \\ u_0(0) = u_0(\omega),\ u_0'(0) = u_0'(\omega) \end{cases}$$

第一个方程两边在 I 上积分，结合条件(P2)可得

$$M\int_0^\omega u_0(t)\mathrm{d}t = \lambda_0\int_0^\omega [f(t,u_0(t)) + Mu_0(t)]\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\int_0^\omega [f(t,u_0(t)) + Mu_0(t)]\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\int_0^\omega f(t,u_0(t))\mathrm{d}t + M\int_0^\omega u_0(t)\mathrm{d}t \leqslant$$
$$-\varepsilon_1\int_0^\omega u_o(t)\mathrm{d}t + M\int_0^\omega u_0(t)\mathrm{d}t$$

于是 $\varepsilon_1\int_0^\omega u_0(t)\mathrm{d}t \leqslant \theta$，故 $\int_0^\omega u_0(t)\mathrm{d}t \leqslant \theta$.

另一方面，由于 $u_0 \in \partial U_r \cap K$，根据锥 K 的定义

$$u_0(t) \geqslant \delta u_0(s) > \theta$$

于是 $\int_0^\omega u_0(t)\mathrm{d}t \geqslant \delta\int_0^\omega u_0(s)\mathrm{d}t = \omega\delta u_0(s) > \theta$

矛盾! 故式(5) 成立，根据引理 3 知：

$$i(A, K \cap U_r, K) = 1 \quad (6)$$

然后证缺方向性. 取 $e_0 \in P$，使 $\|e_0\| = 1$，令 $u_0(t) \equiv e_0$，则 $u_0 \in K\backslash\{\theta\}$.

下证当 R 充分大时，有

$$u - Au \neq \mu u_0,\ \forall u \in K \cap \partial U_R,\ \mu \geqslant 0 \quad (7)$$

反设若 $\exists u_1 \in K$，$\mu_0 \geqslant 0$，使 $u_1 - Au_1 = \mu_0 u_0$，则 $u_1 - \mu_0 u_0 = Au_1$. 根据算子 A 的定义 u_0 满足微分方程

$$-(u_1(t) - \mu_0 u_0)'' + M(u_1(t) - \mu_0 u_0) =$$
$$f(t,u_1(t)) + M(u_1(t) - \mu_0 u_0)$$

且满足周期边界条件，于是

$$-u_1''(t) = f(t,u_1(t)) - \mu_0(e_0'') =$$
$$f(t,u_1(t)) + \theta \geqslant \varepsilon_2 u_1(t) - b(t)$$

两边在 I 上积分可得

$$\int_0^\omega -u_1''(t)\mathrm{d}t \geqslant \varepsilon_2\int_0^\omega u_1(t)\mathrm{d}t - \int_0^\omega b(t)\mathrm{d}t$$

于是

$$\int_0^\omega u_1(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\varepsilon_2}\int_0^\omega b(t)\mathrm{d}t$$

根据锥 K 的定义 $u_1(t) \geqslant \delta u_1(s)$，则

$$\int_0^\omega \delta u_1(s)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\varepsilon_2}\int_0^\omega b(t)\mathrm{d}t$$

$$u_1(s) \leqslant \frac{1}{\delta\omega\varepsilon_2}\int_0^\omega b(t)\mathrm{d}t$$

两边取范数，结合锥 K 的正规性，有

$$\|u_1(s)\| \leqslant \frac{N}{\delta\omega\varepsilon_2}\left\|\int_0^\omega b(t)\mathrm{d}t\right\| \leqslant$$

$$\frac{N\omega}{\delta\omega\varepsilon_2}\|b\| = \frac{N\|b\|}{\delta\varepsilon_2}$$

则

$$\|u_1\| \leqslant \frac{N\|b\|}{\delta\varepsilon_2} =: \bar{R}$$

取 $R > \max\{r, \bar{R}\}$，则式(7)成立，于是根据引理 2 有

$$i(A, K \cap U_R, K) = 0 \quad (8)$$

由凝聚锥映射不动点指数的区域可加性，式(6)和式(8)有

$$i(A, K \cap (U_R/\overline{U_r}, K) =$$
$$i(A, K \cap U_R, K) - i(A, K \cap U_r, K) =$$
$$0 - 1 = -1 \neq 0$$

由可解性知 A 在 $K \cap (U_R/\overline{U_r})$ 中至少有一个不动点，即问题(1)至少有一个正解.

注　定理 1 将关于 f 一致连续这个非常强的条件减弱为连续.

定理 2　设 E 为有序 Banach 空间，P 为其正规锥，正规常数为 N，$f \in C(I \times E, E)$ 把有界集映成有界集，且假设定理 1 的条件(P0)，(P1)成立，若 f 满足下列条件：

(H2) $\exists \varepsilon_1 > 0$ 及 $r_1 > 0$，使

$$f(t,x) \geqslant \varepsilon_1 x,\ \forall t \in I,\ x \in P,\ \|x\| \leqslant r_1$$

(H3) $\exists \varepsilon_2 > 0$ 及 $b(t) \in C(I, P)$，使

$$f(t,x) \leqslant -\varepsilon_2 x + b(t),\ \forall t \in I,\ x \in P$$

则 PBVP(1)至少存在一个正解.

定理 2 的证明类似定理 1 的证明，故略.

参考文献：

[1] CABADA A, NIETO J J. A generation of the monotone iterative technique for nonlinear second order periodic boundary value problem [J]. J Math Anal Appl, 1990, 151(1): 181-189.

[2] 李永祥. 抽象二阶周期边值问题的上下解方法 [J]. 西北师范大学学报：自然科学版，1999，35(4)：1-8.

[3] 李永祥. 二阶非线性常微分方程的正周期解 [J]. 数学学报，2002，45(3)：482-488.

[4] 周文学，张玲忠. 有序 Banach 空间常微分方程的正周期解 [J]. 纯粹数学与应用数学，2003，19(2)：179-184.

[5] 余庆余. 半序 Banach 空间中凝聚映射及其正不动点 [J]. 兰州大学学报：自然科学版，1979，15(2)：23-32.

[6] 郭大均. 非线性泛函分析 [M]. 济南：山东科学技术出版社，1985.

[7] 郭大均，孙经先. 抽象空间常微分方程 [M]. 济南：山东科学技术出版社，1989.

[8] 李永祥，汪　璇. 有序 Banach 空间常微分方程的正周期解 [J]. 西北师范大学学报：自然科学版，2002，38(1)：1-5.