

T-S 模糊控制系统的稳定性研究

吴 宁^{1,2}, 张爱华², 陈 薇³

(1. 兰州工业高等专科学校 电气工程系, 甘肃 兰州 730050; 2. 兰州理工大学 电信学院, 甘肃 兰州 730050;
3. 西安陆军学院, 陕西 西安 710000)

摘要: 针对非线性系统的 T-S(Takagi-Sugeno, T-S)模糊控制模型, 在分析模糊控制系统稳定性的基础上提出了系统新的稳定性条件和分析方法, 减小了以往稳定性判定方法的局限性, 增加了稳定性条件的信息, 从而保证了判稳条件的宽松。

关键词: 模糊控制系统; Takagi-Sugeno 模糊模型; 稳定条件

中图分类号: TP 273.⁺4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1004-0366(2009)02-0115-04

On the Stability of T-S Fuzzy Control System

WU Ning^{1,2}, ZHANG Ai-hua², CHEN Wei³

(1. Department of Electrical Engineering, Lanzhou Polytechnical College, Lanzhou 730050, China;
2. College of Electrical and Informational Engineering, Lanzhou University of Science and Technology,
Lanzhou 730050, China; 3. Xi'an Military Academy, Xi'an 710000, China)

Abstract: According to the Takagi-Sugeno(T-S) fuzzy control model of the nonlinear system, a new stable condition and the corresponding analysis method in a new fuzzy control system were proposed. In this approach, the constraints of the former ways were reduced, and more information is given to the stable condition, so it guarantees the relax of the stable conditions.

Key words: fuzzy control system; Takagi-Sugeno fuzzy model; stable condition

T-S 模糊模型^[1,2]在模糊控制理论的历史上是一个众所周知的里程碑, 由 Takagi 和 Sugeno 于 1985 年提出, 许多模糊控制问题^{2,3}, 如稳定性分析, 系统化设计, 鲁棒稳定性和最优性, 都可通过 T-S 模型解决^[4]. T-S 模糊模型的主要特点是, 模型规则的结论可以通过解析函数表示, 函数的选择取决于其实际应用^[5]. 具体来说, T-S 模糊模型可以用来描述一个很难被精确建模的复杂或非线性系统, 这些局域系统的模型通过模糊推理汇聚起来, 从而形成了完整的动态系统结构。

自 T-S 模糊系统出现以来, 基于该系统的稳定性分析和设计的研究已持续了很长时间. Tong^[6], Lee^[7], Tanaka 和 Sugeno^[8] 针对不确定的 MIMO 模糊模型提出了鲁棒控制策略, 但是当模糊规则的数量增加的时候, 其方法会受到限制^{9,10}; 为了改变这种情况, Tanaka^[11] 等人推导出放松稳定条件, 适当选择参数为“P”的矩阵, 从而在稳妥性和计算的方便之间进行权衡, 然而这种方法可能会影响到控制器的设计; Cao, Johansson, Zhang 等人也作了相关的研究^[1], 他们的研究结果在一定程度上放宽了

Tanaka 等人的稳定性判定条件,但也各自存在一些不足之处.因此,由于 T-S 模糊控制系统本质上的非线性和复杂性,其稳定性分析及系统化设计尚未得到完善的解决.

1 T-S 模糊控制系统

T-S 模型基于输入模糊化分的思想,可以看作是分段线性化的扩展,能描述一类非常广泛的静态或动态非线性系统,其模糊蕴含条件句形如“若 x 是 A , 则 $y = f(x)$ ”,其中 $f(x)$ 是 x 的线性函数,它能够表示一般的非线性系统,是在输入空间的模糊划分的基础上逐次线性划分的扩展^[12].如果一个多输入多输出的非线性动态系统被 T-S 模糊系统模型化,那么它可以表示成如下形式:

(1) If-then 形式(I)

L_i : 如果 $x_1(t)$ 是 M_{i1} , $x_2(t)$ 是 M_{i2} , ..., $x_n(t)$ 是 M_{in} , 并且 $u_1(t)$ 是 N_{i1} , $u_2(t)$ 是 N_{i2} , ..., $u_n(t)$ 是 N_{in} , 则

$$x(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (1)$$

(2) Input-output 形式(II)

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x) \{ A_i x(t) + B_i u(t) \}, \quad (2)$$

其中 $h_i(x) \geq 0, \sum_{i=1}^r h_i(x) = 1, i = 1, 2, \dots, r$.

$L_i(i = 1, \dots, r)$ 是第 i 个模糊规则, r 是规则数, $M_{i1}, M_{i2}, \dots, M_{in}$ 是模糊变量, h_i 是模糊基函数. 对于由式(1)和式(2)表示的非线性能指标,设计的模糊控制器可以与其具有相同的部分的性能指标.

(3) If-then 形式(I)

$$\left[\frac{A_i - B_i F_j + A_j - B_j F_i}{2} \right]^T P \left[\frac{A_i - B_i F_j + A_j - B_j F_i}{2} \right] - P \leq 0, \quad (i < j, h_i h_j \neq 0). \quad (6)$$

2.2 放松的稳定性条件

在上面所述的基本的稳定性条件具有一定的保守性,因为它要求系统(5)的所有子系统关于 P 都是稳定的,为了放松这个条件,又给出下面的稳定性条件.

定理3 如果存在对称矩阵 P 和 M 满足下列各

$$\left[\frac{A_i - B_i F_j + A_j - B_j F_i}{2} \right]^T P + P \left[\frac{A_i - B_i F_j + A_j - B_j F_i}{2} \right] - M \leq 0, \quad (i < j, h_i h_j \neq 0).$$

2.3 自由 T-S 模糊控制系统的稳定性分析

基于 Tanaks 等人对于 T-S 模糊控制系统的稳定性的结论,我们对输入采用双交叠模糊划分的自由 T-S 模糊控制系统的稳定性作了进一步研究^[1],得到如下定理:

L_i : 如果 $x_1(t)$ 是 M_{i1} , $x_2(t)$ 是 M_{i2} , ..., $x_n(t)$ 是 M_{in} , 则

$$u(t) = -F_i x(t). \quad (3)$$

(4) Input-output 形式(II)

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x) \{ -F_i x(t) \}. \quad (4)$$

闭环模糊控制系统表达式为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x) h_j(x) \{ A_i - B_i F_j \} x(t), \quad i, j = 1, \dots, r. \quad (5)$$

2 系统的稳定性

2.1 Lyapunov 稳定性理论

由 Layapunov 稳定性理论^[12],判定控制系统稳定性的充分条件如下.

定理1 设系统可以表示为 $\dot{x}(t) = f(x(t))$, 其中 $x(t) \in R^n, f(x(t))$ 为 $n \times 1$ 的函数向量,且 $f(0) = 0$, 如果存在一个标量函数 $V(x(t))$ 满足以下条件:

- (1) $V(0) = 0$;
- (2) 对 $\forall x \neq 0$, 都有 $V(x(t)) > 0$;
- (3) 当 $\|x(t)\| \rightarrow \infty$ 时, $\|V(x(t))\| \rightarrow \infty$;
- (4) 对 $\forall x \neq 0$, 都可得到 $\Delta V(x(t)) < 0$.

则系统 $\dot{x}(t) = f(x(t))$ 关于平衡点 0 是全局大范围渐进稳定的.

定理2 如果存在公共正定矩阵 P 满足下列各式,则系统(5)关于平衡点 0 是二次稳定的:

$$P > 0$$

$$(A_i - B_i F_i)^T P (A_i - B_i F_i) - P < 0, \quad (i = 1, \dots, r)$$

式,则如式(5)的模糊控制系统关于平衡点是二次稳定的:

$$P > 0, M \geq 0$$

$$(A_i - B_i F_i)^T P + P (A_i - B_i F_i) - M < 0, \quad (i = 1, \dots, r)$$

定理4 对于 $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^l h_i A_i x(t)$ 所描述的

T-S 模糊控制系统,如果各输入变量均采用 SFP,则系统在平衡状态大范围渐进稳定的充分条件是:在各 MORG 中分别存在一个公共的正定矩阵 P_j , 满

足 $A_i^T P_j + P_j A_i < 0$, 其对第 j 个最大交叠规则组中所有子系统都成立, $j = 1, 2, \dots, \prod_{p=1}^n (m_p - 1), i \in \{\text{第 } j \text{ 个 MORG 中包含的序列号}\}$.

证明 设系统的状态输入为 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 系统中有 r 个交叠规则组, $l_j = \{\text{第 } j \text{ 个交叠规则组包含的规则序号}\}$, 交叠规则组的作用域为 $S_j (j = 1, 2, \dots, r)$, 则 $\bigcup_{j=1}^r S_j = S$.

在第 j 个交叠规则组的作用域 S_j 上系统的局域模型为

$$\dot{x} = \sum_{i \in l_j} h_i A_i x, \quad (7)$$

由于各交叠规则组作用域上的特征函数可以定义如下

$$\lambda_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in S_j, \\ 0, & \text{other,} \end{cases} \quad \sum_{j=1}^r \lambda_j(x) = 1 \quad (8)$$

那么模糊系统在整个输入论域上的总模型可表示为

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^r \lambda_j(x) \left(\sum_{i \in l_j} h_i A_i x \right). \quad (9)$$

在第 j 个交叠规则组的作用域上, 如果存在公共正定矩阵 P_j 满足 $A_i^T P_j + P_j A_i < 0 (i \in l_j)$, 选择 $V_j(x) = x^T P_j x$ 为该交叠规则组作用域上的一个 Lyapunov 函数, 则容易验证当 $h_i > 0$ 时, 对任意的 $x \neq 0$, 可推出

$$\begin{aligned} \dot{V}_j(x) &= \dot{x}^T P_j x + x^T P_j \dot{x} = \\ & \left(\sum_{i \in l_j} h_i A_i x \right)^T P_j x + x^T P_j \left(\sum_{i \in l_j} h_i A_i x \right) = \\ & \sum_{i \in l_j} h_i \{ x^T (A_i^T P_j + P_j A_i) x \} < 0, \end{aligned}$$

令 $P = \sum_{j=1}^r \lambda_j P_j$, 在整个输入论域上构造 Lyapunov 函数为

$$\begin{aligned} V(x) &= x^T P x = x^T \left(\sum_{j=1}^r \lambda_j P_j \right) x = \\ & \sum_{j=1}^r \lambda_j x^T P_j x = \sum_{j=1}^r \lambda_j V_j(x), \end{aligned}$$

由此, 我们可以得到如下结论: 对于模糊系统 $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i A_i x(t)$ 来说, 如果输入变量采用双交叠模糊分划, 那么对该组中所有子系统的各交叠规则组中分别存在公共的正定矩阵 P , 使 $A_i^T P_j + P_j A_i < 0$ 成立, 则系统是大范围渐进稳定的.

如果模糊系统的输入变量采用双交叠模糊分划时, 所有交叠组的规则必须存在于 MORG 中, 因此我们只需找到各最大交叠规则组内分别存在公共的正定矩阵 P , 满足 $A_i^T P_j + P_j A_i < 0$ 即可.

3 系统仿真

假设存在一个多输入单输出系统 (MISO), 其输入量为 x_1, x_2 , 则其必须满足以下规则.

R_{ij} : 如果 x_1 是 F_1^i, x_2 是 F_2^j , 则 $\dot{x} = A_{ij} x$, 其中 $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$;

x_1 的模糊分划为 $\{F_1^i, i = 1, 2, 3\}$, x_2 的模糊分划为 $\{F_2^j, j = 1, 2, 3\}$, 依此可以判断其模糊规则共为 9 条. 赋予矩阵 A_{ij} 一定的数值以及给定初始条件 x_0 , 观察系统的状态响应曲线见图 1, 通过比较后, 可以观察到所提系统的控制特性更好.

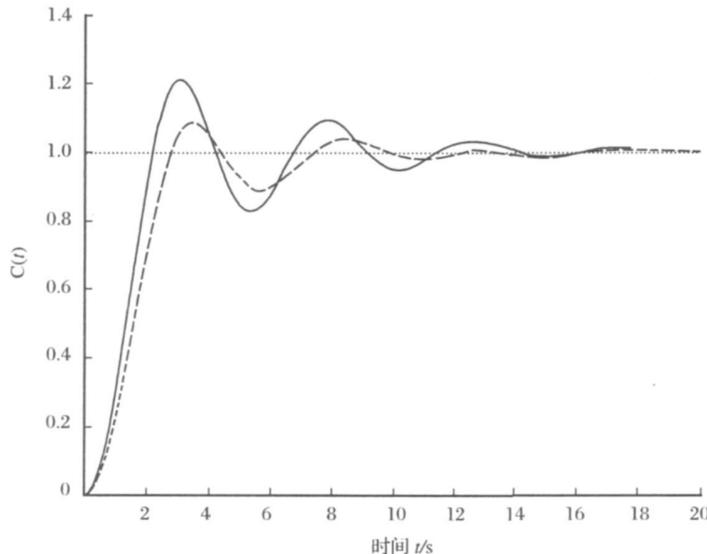


图 1 T-S 模糊系统的系统响应

— 原方法 改进方法

4 结束语

提出的 T-S 模糊控制系统稳定性条件比传统条件更加有效地考虑了输入变量的隶属度信息, 随着系统复杂性的增加, 新的条件会更加有效, 并且可以用于模糊控制系统的设计与综合中, 减少了以前方法的保守性.

参考文献:

- [1] Xiu Zhi-hong, Ren Guang. Stability Analysis and Systematic Design of Takagi-Sugeno Fuzzy Control Systems[J] . Fuzzy Sets and Systems, 2005, 151: 119-138.
- [2] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control[J] . IEEE Trans. Syst. Man Cyber, 1985, 15: 116-132.
- [3] 缙新科, 刘巍, 杨星. 基于模糊自适应控制的悬臂梁振动主动控制算法研究[J] . 甘肃科学学报, 2008, 20(3): 75-78.
- [4] Tanaka K, Wang H O. Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach[J] . Wiley-Interscience, 2001.
- [5] Ting Shen-sheng. Stability Analysis and Design of Takagi-Sugeno Fuzzy Systems[J] . Information Sciences, 2006, 176: 2 817-2 845.
- [6] Tong S, Wang T, Li H X. Fuzzy Robust Tracking Control for Uncertain Nonlinear Systems[J] . Int. J. Approx. Reason, 2002, 30: 73-90.
- [7] Lee H J, Park J B, Chen G. Robust Fuzzy Control of Nonlinear Systems with Parameter Uncertainties[J] . IEEE Trans Fuzzy Syst, 2001, 9(2): 369-379.
- [8] Tanaka K, Sugeno M. Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems[J] . Fuzzy Sets Syst, 1992, 2: 135-156.
- [9] Wang H O, Tanaka K, Griffin M F. An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues[J] . IEEE Trans. Fuzzy Syst, 1996, 4(1): 14-23.
- [10] Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. Robust Stabilization of a Class of Uncertain Non-linear Systems Via Fuzzy Control: Quadratic Stabilizability, Control Theory, and Linear Matrix Inequalities [J] . IEEE Trans. Fuzzy Syst. 1996, 4: 1-13.
- [11] Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers: Relaxed Stability Conditions and LMI-based Designs[J] . IEEE Trans, Fuzzy Syst, 1998, 6(2): 250-265.
- [12] 郑恩让, 回立川, 王新民. T-S 连续模糊控制系统的稳定性研究[J] . 陕西科技大学学报, 2005, 23: 40-43.

作者简介:

吴宁 (1981-) 男, 甘肃省兰州人, 2008 年毕业于兰州大学信息学院, 获工学硕士学位, 现在兰州高等工业专科学校电气系任教, 主要研究方向为电子信息工程与自动化, 计算机网络.