

DOI: 10.3969/j.issn.1001-0505.2017.01.023

热冲击下理想黏结三明治板的 分数阶广义热弹性问题分析

徐业守¹ 徐赵东¹ 何天虎² 陈锦祥¹ 张永胜³ 胡健³ 王康建¹

(¹ 东南大学混凝土及预应力混凝土结构教育部重点实验室, 南京 210096)

(² 兰州理工大学理学院, 兰州 730050)

(³ 江苏省建筑设计研究院有限公司, 南京 210019)

摘要: 为了研究对称热冲击作用下三明治板的广义热弹动态响应, 假定三明治板连接界面处为零阻抗理想黏结, 材料特性参数随温度变化, 采用分数阶广义热弹性理论, 给出了层合板广义热弹耦合的控制方程. 基于拉普拉斯变换及其数值反变换对控制方程进行求解, 得到了无量纲温度、位移及应力的数值解. 重点讨论了热传导系数、密度和比热容等材料参数在界面处的变化对热传递及结构响应的影响, 同时考虑了分数阶参数及温度相关性参数的影响效应. 计算结果表明, 温度、位移和应力随界面处材料热传导系数、密度和比热容的减小而增加; 分数阶参数对温度和应力的影响较大, 对位移影响较小; 温度、位移和应力的幅值随温度相关性参数的增大而减小. 界面处材料热传导系数、密度和比热容的减小促进热沿板厚方向的传导, 分数阶理论和材料的温度相关性对温度、位移和应力的分布影响显著.

关键词: 分数阶广义热弹性理论; 对称层合板; 温度相关性; 拉普拉斯变换

中图分类号: O343.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-0505(2017)01-0130-07

Analysis on fractional-order generalized thermoelastic problem for ideal adhesion sandwich plate under thermal shock

Xu Yeshou¹ Xu Zhaodong¹ He Tianhu² Chen Jinxiang¹
Zhang Yongsheng³ Hu Jian³ Wang Kangjian¹

(¹ Key Laboratory of Concrete and Prestressed Concrete Structures of Ministry of Education, Southeast University, Nanjing 210096, China)

(² School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

(³ Jiangsu Provincial Architectural Design and Research Institute Ltd., Nanjing 210019, China)

Abstract: To investigate the generalized thermoelastic dynamic response of a sandwich plate subjected to symmetrical thermal shock, assuming that the value of thermal impedance at the interface is zero with ideal adhesion and the material properties change with the temperature, the governing equations of the layered plate with generalized thermoelasticity coupling are formulated based on the fractional order generalized thermoelasticity theory. The governing equations are solved based on Laplace transform and its numerical inversion, and the numerical values of the non-dimensional temperature, displacement, and stress are obtained. The effects of material parameters alteration including the thermal conductivity, density and heat capacity at the interface on the heat transfer and structure response are studied, and the effects of the fractional order parameter and temperature-dependent parameter are considered at the same time. The numerical results show that the values of temperature, displacement and stress increase with decreasing thermal conductivity, density and heat capacity at the interface. The fractional order parameter has a significant effect on temperature and stress, and a slight effect on displacement; the amplitudes of temperature, displacement, and stress decline with increasing temperature-dependent parameter. The decreases of thermal conductivity, density and heat capacity at the interface promote the heat transfer through the thickness direction of the plate, and the fractional-order theory and material temperature dependence have significant effects on the distributions of temperature, displacement, and stress are significant.

Key words: fractional-order theory of generalized thermoelasticity; symmetrical layered plate; temperature-dependence; Laplace transform

收稿日期: 2016-07-06. 作者简介: 徐业守(1990—), 男, 博士生; 徐赵东(联系人), 男, 博士, 教授, 博士生导师, xzsubmission@163.com.

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(51625803)、国家自然科学基金资助项目(11572088)、中青年科技创新领军人才资助项目、江苏省“333 人才培养工程”资助项目.

引用本文: 徐业守, 徐赵东, 何天虎, 等. 热冲击下理想黏结三明治板的分数阶广义热弹性问题分析[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2017, 47(1): 130-136. DOI: 10.3969/j.issn.1001-0505.2017.01.023.

在经典热弹性理论中,认为热以无限大速度传播,这与物理实际并不相符.为弥补经典热弹性理论的不足,学者们发展了广义热弹性理论,主要包括 Lord-Shulman (L-S)^[1] 广义热弹性理论和 Green-Lindsay (G-L)^[2] 广义热弹性理论.这 2 种理论都能描述热在介质中以有限的速度传播. Sherief 等^[3] 和 Ezzat 等^[4] 用分数阶微积分对其进行进一步修正,建立了分数阶广义热弹性理论. Aouadi^[5] 的研究表明,材料的特性参数与温度有关,如弹性模量、泊松比、热膨胀系数和导热系数等随温度变化. Youssef 等^[6] 和熊启林等^[7-8] 基于广义热弹性理论,对层板结构热力学问题进行了深入的研究.

本文基于 Ezzat 等^[4] 提出的分数阶广义热弹性理论,对材料特性参数与温度相关的三明治板,在对称热荷载作用下的广义热弹耦合问题的动态响应进行了研究,定量得到了无量纲温度、位移及应力的分布规律.

1 基本方程

基于 Ezzat 等^[4] 建立的分数阶广义热弹性理论,不考虑体力和内热源,均质各向同性热弹性体的控制方程为:

1) 运动方程

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

2) 本构方程

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + (\lambda \varepsilon_{kk} - \gamma \theta) \delta_{ij} \quad (2)$$

3) 几何方程

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

4) 能量方程

$$q_{i,j} = -\rho T_0 \dot{\eta} \quad (4)$$

$$\rho \eta = \gamma \varepsilon_{kk} + \frac{\rho C_E}{T_0} \theta \quad (5)$$

5) 热传导方程

$$\kappa \theta_{,ii} = \left(1 + \frac{\tau_0^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\right) (\rho C_E \dot{\theta} + T_0 \gamma \varepsilon_{kk}) \quad (6)$$

式中 σ_{ij} 为应力分量; u_i 为位移分量; ρ 为质量密度; ε_{ij} 为应变分量; $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ 为体积膨胀率; $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_1$, λ , μ 均为拉梅常数, α_1 为线性热膨胀系数; $\theta = T - T_0$, T 为绝对温度, T_0 为参考温度; δ_{ij} 为 Kronecker 张量分量; q_i 为热流量分量; η 为熵密度; C_E 为比热容; κ 为热传导系数; τ_0 为热松弛时间; α 为分数阶参数; $\sigma_{ij,j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$; $q_{i,j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial q_{ij}}{\partial x_j}$;

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \theta_{,ii} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial^2 x_i}, i, j, k = 1, 2, 3.$$

假定与温度相关的材料特性参数 $\lambda = \lambda_0 f(\theta)$, $\mu = \mu_0 f(\theta)$, $\kappa = \kappa_0 f(\theta)$. 其中 λ_0 , μ_0 和 κ_0 为不考虑温度相关性时的材料特性参数, $f(\theta)$ 为温度增量的函数. Rishin 等^[9] 研究表明 $f(\theta) = 1 - \alpha^* \theta$, α^* 为经验常数. 当 $|T - T_0| / T_0 \ll 1$ 时 $f(\theta) \approx 1 - \alpha^* T_0$, 则均质各向同性材料热弹性问题的偏微分控制方程由式(1)~(6)改写为

$$\sigma_{ij} = (1 - \alpha^* T_0) [2\mu_0 \varepsilon_{ij} + (\lambda_0 \varepsilon_{kk} - \gamma_0 \theta) \delta_{ij}] \quad (7)$$

$$\rho \ddot{u}_i = (1 - \alpha^* T_0) [2\mu_0 \varepsilon_{ij,j} + (\lambda_0 \varepsilon_{kk,j} - \gamma_0 \theta_{,j}) \delta_{ij}] \quad (8)$$

$$(1 - \alpha^* T_0) \kappa_0 \theta_{,ii} = \left(1 + \frac{\tau_0^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\right) [\rho C_E \dot{\theta} + (1 - \alpha^* T_0) T_0 \gamma_0 \varepsilon_{kk}] \quad (9)$$

式中, $\varepsilon_{ij,j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j}$, $\varepsilon_{kk,j} = \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial x_j}$, $\theta_{,j} = \frac{\partial \theta}{\partial x_j}$, $i, j, k = 1, 2, 3$.

2 问题描述

考虑一个由 2 种不同材料组成的三明治板,两侧层板厚度为 l , 中间层板厚度为 $2l$, 其结构如图 1 所示. 三明治板为均质材料, 各向同性, 2 种材料层间假定为理想黏结. 外侧 2 层板(三明治板第 I, III 层区域)采用铜质材料, 为了研究热传导系数、密度和比热容对材料界面热弹性的影响, 中间层(三明治板第 II 层区域)的热传导系数、密度和比热容的取值与外侧两层按一定比例选取, 其比例值 κ^{II} / κ^I , ρ^{II} / ρ^I , C_E^{II} / C_E^I 均为 0.5, 1.0 或 2.0, 其他材料参数与中间层取值相同, 上标 I, II 分别表示层板第 I 层与第 II 层区域.

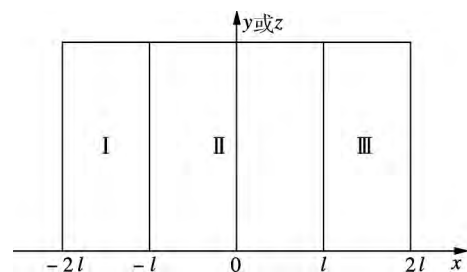


图 1 三明治板结构横截面示意图

对于上述三明治板结构,在对称荷载作用下,假设 y 与 z 向尺寸为无穷大,厚度 x 方向的尺寸远小于板平面上 y 与 z 向的尺寸,因而只考虑在垂直于板面的热冲击下各变量沿板厚方向的分布规律.

在板厚方向,以对称层中心位置为坐标原点,

<http://journal.seu.edu.cn>

将三明治板简化为一维问题. 初始时刻, 三明治板两侧外表面自由, 热冲击作用下, 其位移 u^j (上标 $j = \text{I, II, III}$ 表示层板的第 I, II 和 III 层区域) 的分量为

$$u'_x = u^j(x, t), u'_y = 0, u'_z = 0 \quad (10)$$

由此, 得到应变分量为

$$\varepsilon'_x = \frac{\partial u^j}{\partial x} \quad (11)$$

对于一维问题, 式(7) ~ (9) 可以简化为

$$\sigma^j = (1 - \alpha^* T_0) \left[(\lambda_0^j + 2\mu_0^j) \frac{\partial u^j}{\partial x} - \gamma_0^j \theta^j \right] \quad (12)$$

$$\rho^j \ddot{u}_i^j = (1 - \alpha^* T_0) \left[(\lambda_0^j + 2\mu_0^j) \frac{\partial^2 u^j}{\partial x^2} - \gamma_0^j \frac{\partial \theta^j}{\partial x} \right] \quad (13)$$

$$(1 - \alpha^* T_0) \kappa_0^j \theta''_i = \left(1 + \frac{\tau_0^{j\alpha}}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \right) \cdot$$

$$\left[\rho^j C_E^j \frac{\partial \theta^j}{\partial t} + T_0 (1 - \alpha^* T_0) \gamma_0^j \frac{\partial^2 u^j}{\partial x \partial t} \right] \quad (14)$$

为简便起见, 引入如下无量纲量:

$$x^* = c_0 \eta_0 x, u^j{}^* = c_0 \eta_0 u^j, t^* = c_0^2 \eta_0 t$$

$$\tau_0^{j*} = c_0^2 \eta_0 \tau_0^j, \theta^j{}^* = \frac{\theta^j}{T_0}, \sigma^j{}^* = \frac{\sigma^j}{\mu_0^j}$$

$$q^j{}^* = \frac{q^j}{\kappa_0^j T_0 c_0^2 \eta_0^2}, \eta_0 = \frac{\rho^j C_E^j}{\kappa_0^j}, c_0 = \sqrt{\frac{\lambda_0^j + 2\mu_0^j}{\rho^j}}$$

对式(12) ~ (14) 进行无量纲化处理, 可得 (为简便起见, 略去无量纲量右上角的星号, 以下变量均为无量纲量):

$$v \sigma^j = \frac{\lambda_0^j + 2\mu_0^j}{\mu_0^j} \frac{\partial u^j}{\partial x} - \frac{\gamma_0^j T_0}{\mu_0^j} \theta^j \quad (15)$$

$$\frac{\lambda_0^j + 2\mu_0^j}{\rho^j c_0^2} \frac{\partial^2 u^j}{\partial x^2} - \frac{\gamma_0^j T_0}{\rho^j c_0^2} \frac{\partial \theta^j}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u^j}{\partial t^2} \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \theta^j}{\partial x^2} = \left(1 + \frac{\tau_0^{j\alpha}}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \right) \left(v \frac{\rho^j C_E^j}{\kappa_0^j \eta_0} \frac{\partial \theta^j}{\partial t} + \frac{\gamma_0^j}{\kappa_0^j \eta_0} \frac{\partial^2 u^j}{\partial x \partial t} \right) \quad (17)$$

式中 $v = \frac{1}{f(\theta)} = \frac{1}{1 - \alpha^* T_0}$ 为温度相关性参数, 表征

温度对材料特性及其参数的影响. 假定板材初始时刻自由, 初始温度 T_0 为常值, 则初始条件为 $u^j(x, 0) = \dot{u}^j(x, 0) = 0, \theta^j(x, 0) = \dot{\theta}^j(x, 0) = 0$.

控制方程求解时, 需要同时考虑初始条件和边界条件. 对称热荷载作用下的三明治板, 两侧坐标为 $\pm 2l$, 层合板交界面处的坐标为 $\pm l$, 初始条件被假定为均匀齐次, 边界条件为:

1) 三明治板的两侧界面上不受任何外力, 应力自由, 由此得到 $\sigma^I(\pm 2l, t) = 0$.

2) 三明治板的两侧界面受到对称热荷载的冲

击作用, 即 $\theta^I(\pm 2l, t) = \theta_0 H(t)$, 其中 θ_0 为常数, $H(t)$ 为 Heaviside 函数.

3) 三明治板的交界面处, 材料的特性参数发生了变化, 但仍需要满足热流流量相等的连续性条件, 即在 $x = -l$ 处 $q^I = q^{II}$; 在 $x = l$ 处 $q^{II} = q^{III}$.

4) 假定三明治板在交界面处是理想黏结, 则可以认为在交界面处不同层板的位移是连续的, 即在 $x = -l$ 处 $u^I = u^{II}$; 在 $x = l$ 处 $u^{II} = u^{III}$.

3 拉氏域内的求解

根据定义, 拉普拉斯变换具有如下形式:

$$\bar{f}(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} f(x, t) dt$$

式中, s 为拉普拉斯变换因子, 且 $s = v + iw$.

对式(15) ~ (17) 运用拉普拉斯变换, 可得

$$v \bar{\sigma}^j = \frac{\lambda_0^j + 2\mu_0^j}{\mu_0^j} \frac{d \bar{u}^j}{dx} - \frac{\gamma_0^j T_0}{\mu_0^j} \bar{\theta}^j \quad (18)$$

$$\frac{\lambda_0^j + 2\mu_0^j}{\rho^j c_0^2} \frac{d^2 \bar{u}^j}{dx^2} - \frac{\gamma_0^j T_0}{\rho^j c_0^2} \frac{d \bar{\theta}^j}{dx} = v s^2 \bar{u}^j \quad (19)$$

$$\frac{d^2 \bar{\theta}^j}{dx^2} = \left(1 + \frac{\tau_0^{j\alpha}}{\alpha!} s^\alpha \right) \left(v s \frac{\rho^j C_E^j}{\kappa_0^j \eta_0} \bar{\theta}^j + \frac{\gamma_0^j s}{\kappa_0^j \eta_0} \frac{d \bar{u}^j}{dx} \right) \quad (20)$$

对式(19) 和式(20) 进行消元, 得到 $\bar{u}^I, \bar{\theta}^I$ 所满足的偏微分方程:

$$(\nabla^4 - m_1 \nabla^2 + m_2) (\bar{u}^I, \bar{\theta}^I) = 0 \quad (21)$$

其中

$$m_1 = \left(v + \frac{g b}{\beta^2} \right) \left(1 + \frac{\tau_0^{I\alpha}}{\alpha!} s^\alpha \right) s + v s^2$$

$$m_2 = v^2 s^3 \left(1 + \frac{\tau_0^{I\alpha}}{\alpha!} s^\alpha \right), \nabla = \frac{d}{dx}$$

$$\beta^2 = \frac{\lambda_0^I + 2\mu_0^I}{\mu_0^I}, b = \frac{\gamma_0^I T_0}{\mu_0^I}, g = \frac{\gamma_0^I}{\rho^I C_E^I}$$

式(21) 可以改写为

$$(\nabla^2 - p_1^2) (\nabla^2 - p_2^2) (\bar{u}^I, \bar{\theta}^I) = 0 \quad (22)$$

p_1 和 p_2 是如下特征方程的根:

$$p^4 - m_1 p^2 + m_2 = 0 \quad (23)$$

求解后, p_1 和 p_2 具有如下形式:

$$p_1 = \sqrt{\frac{m_1 + \sqrt{m_1^2 - 4m_2}}{2}}, p_2 = \sqrt{\frac{m_1 - \sqrt{m_1^2 - 4m_2}}{2}} \quad (24)$$

同理, 对式(19) 和(20) 进行消元, 得到 $\bar{u}^{II}, \bar{\theta}^{II}$ 所满足的偏微分方程为

$$(\nabla^4 - n_1 \nabla^2 + n_2) (\bar{u}^{II}, \bar{\theta}^{II}) = 0 \quad (25)$$

其中

$$n_1 = \left(\frac{a_2 b_2}{a_1} + b_1 v \right) \left(1 + \frac{\tau_0^{II\alpha}}{\alpha!} s^\alpha \right) s + \frac{v s^2}{a_1}$$

$$n_2 = \frac{b_1}{a_1} \left(1 + \frac{\tau_0^{\parallel \alpha}}{\alpha!} s^\alpha \right) v^2 s^3$$

$$a_1 = \frac{\lambda_0^{\parallel} + 2\mu_0^{\parallel}}{\rho^{\parallel} c_0^2}, a_2 = \frac{\gamma_0^{\parallel} T_0}{\rho^{\parallel} c_0^2}$$

$$b_1 = \frac{\rho^{\parallel} C_E^{\parallel}}{\kappa_0^{\parallel} \eta_0}, b_2 = \frac{\gamma_0^{\parallel}}{\kappa_0^{\parallel} \eta_0}$$

式(25)可以改写为

$$(\nabla^2 - q_1^2)(\nabla^2 - q_2^2)(\bar{u}^{\parallel} \bar{\theta}^{\parallel}) = 0 \quad (26)$$

q_1 和 q_2 是如下特征方程的根:

$$q^4 - n_1 q^2 + n_2 = 0 \quad (27)$$

求解后 q_1 和 q_2 具有如下形式:

$$q_1 = \sqrt{\frac{n_1 + \sqrt{n_1^2 - 4n_2}}{2}}, q_2 = \sqrt{\frac{n_1 - \sqrt{n_1^2 - 4n_2}}{2}} \quad (28)$$

对于图 1 所示的三明治板复合结构, 由于第 I 层与第 III 层材料特性参数相同, 因而其解析解具有相同的表达式, 第 II 层材料特性参数与外侧两层不同, 得到的解析解形式也不同.

1) 第 I 层与第 III 层区域位移和温度解析解为

$$\bar{u}^I = C_1 e^{-p_1 x} + C_2 e^{p_1 x} + C_3 e^{-p_2 x} + C_4 e^{p_2 x} \quad (29)$$

$$\bar{\theta}^I = C_{11} e^{-p_1 x} + C_{22} e^{p_1 x} + C_{33} e^{-p_2 x} + C_{44} e^{p_2 x} \quad (30)$$

式中 $C_i(s), C_{ii}(s) (i=1, 2, 3, 4)$ 为关于 s 函数的未知待定参数; p_i 为方程(21)的解.

将式(29)和(30)代入式(19), 得到

$$C_{11} = -A_1 C_1, C_{22} = A_1 C_2, C_{33} = -A_2 C_3, C_{44} = A_2 C_4 \quad (31)$$

式中 $A_i = \beta^2 \frac{p_i^2 - v s^2}{b p_i} (i=1, 2)$. 从而有

$$\bar{\theta}^I = -A_1 C_1 e^{-p_1 x} + A_1 C_2 e^{p_1 x} - A_2 C_3 e^{-p_2 x} + A_2 C_4 e^{p_2 x} \quad (32)$$

将式(29)和(32)代入式(18)中, 求得 $\bar{\sigma}^I$ 表达式为

$$\bar{\sigma}^I = -B_1 C_1 e^{-p_1 x} + B_1 C_2 e^{p_1 x} - B_2 C_3 e^{-p_2 x} + B_2 C_4 e^{p_2 x} \quad (33)$$

式中 $B_i = \beta^2 \frac{s^2}{p_i} (i=1, 2)$.

2) 与第 I 层和第 III 层区域求解方法相同, 得到第 II 层区域位移、温度和应力解析解为

$$\bar{u}^{\parallel} = E_1 e^{-q_1 x} + E_2 e^{q_1 x} + E_3 e^{-q_2 x} + E_4 e^{q_2 x} \quad (34)$$

$$\bar{\theta}^{\parallel} = -D_1 E_1 e^{-q_1 x} + D_1 E_2 e^{q_1 x} - D_2 E_3 e^{-q_2 x} + D_2 E_4 e^{q_2 x} \quad (35)$$

$$\bar{\sigma}^{\parallel} = -F_1 E_1 e^{-q_1 x} + F_1 E_2 e^{q_1 x} - F_2 E_3 e^{-q_2 x} + F_2 E_4 e^{q_2 x} \quad (36)$$

式中 $E_i(s) (i=1, 2, 3, 4)$ 为未知待定参数, 是关于

s 的函数 q_i 为方程(25)的解.

求解过程中

$$D_i = \frac{a_1 q_i^2 - v s^2}{a_2 q_i}$$

$$F_i = \frac{(a_2 c_1 - a_1 c_2) q_i^2 + c_2 v s^2}{a_2 v q_i} \quad i=1, 2$$

$$c_1 = \frac{\lambda_0^{\parallel} + 2\mu_0^{\parallel}}{\mu_0^{\parallel}}, c_2 = \frac{\gamma_0^{\parallel} T_0}{\mu_0^{\parallel}}$$

对 $C_i(s), C_{ii}(s) (i=1, 2, 3, 4)$ 等未知待定参数进行求解时, 需要考虑三明治板对称结构外侧面的边界条件. 在拉普拉斯域内, 在 $\pm 2l$ 处的边界条件可以转化为

$$\bar{\sigma}^I(\pm 2l, s) = 0, \bar{\theta}^I(\pm 2l, s) = \frac{\theta_0}{s} \quad (37)$$

根据式(32)、(33), 利用式(37)的边界条件, 得到如下方程组:

$$-A_1 C_1 e^{2p_1 l} + A_1 C_2 e^{-2p_1 l} - A_2 C_3 e^{2p_2 l} + A_2 C_4 e^{-2p_2 l} = \frac{\theta_0}{s} \quad (38)$$

$$-A_1 C_1 e^{-2p_1 l} + A_1 C_2 e^{2p_1 l} - A_2 C_3 e^{-2p_2 l} + A_2 C_4 e^{2p_2 l} = \frac{\theta_0}{s} \quad (39)$$

$$-B_1 C_1 e^{2p_1 l} + B_1 C_2 e^{-2p_1 l} - B_2 C_3 e^{2p_2 l} + B_2 C_4 e^{-2p_2 l} = 0 \quad (40)$$

$$-B_1 C_1 e^{-2p_1 l} + B_1 C_2 e^{2p_1 l} - B_2 C_3 e^{-2p_2 l} + B_2 C_4 e^{2p_2 l} = 0 \quad (41)$$

在 Matlab 中对方程组(38)~(41)进行求解, 可得到 $C_i(s) (i=1, 2, 3, 4)$ 的表达式. 而 $E_i(s) (i=1, 2, 3, 4)$ 解析形式的确定, 则必须考虑层合板交界面处 ($x = \pm l$ 处) 的边界条件. 如前所述, 在交界面处, 热流流量相等, 即

$$\bar{q}^I|_{x=-l} = \bar{q}^{\parallel}|_{x=-l}, \bar{q}^{\parallel}|_{x=l} = \bar{q}^{\text{III}}|_{x=l} \quad (42)$$

根据分数阶广义热弹性理论, 热传导方程为

$$\left(1 + \frac{\tau_0^j \alpha}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \right) q^j = -\kappa^j \nabla \theta^j \quad (43)$$

在第 I、III 层和第 II 层区域分别对式(43)进行无量纲化, 可以得到

$$\left(1 + \frac{\tau_0^I \alpha}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \right) q^I = -\xi_1 \nabla \theta^I \quad (44)$$

$$\left(1 + \frac{\tau_0^{\parallel} \alpha}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \right) q^{\parallel} = -\xi_2 \nabla \theta^{\parallel} \quad (45)$$

式中 $\xi_1 = \frac{1}{c_0 \eta_0}, \xi_2 = \frac{1}{c_0 \eta_0} \frac{\kappa_0^{\parallel}}{\kappa_0^I}$.

对式(44)、(45)进行拉普拉斯变换, 可得

$$\bar{q}^I = \frac{-\xi_1}{(1 + \tau_0^I \alpha s^\alpha / \alpha!)} \frac{d\bar{\theta}^I}{dx} \quad (46)$$

$$\bar{q}^{\text{II}} = \frac{-\xi_2}{(1 + \tau_0^{\text{II}} s^\alpha / \alpha!)} \frac{d\bar{\theta}^{\text{II}}}{dx} \quad (47)$$

由于各变量在外侧两层区域的表达形式相同,式(42)的边界条件可以表示为

$$\frac{\xi_1}{(1 + \tau_0^{\text{I}} s^\alpha / \alpha!)} \frac{d\bar{\theta}^{\text{I}}}{dx} \Big|_{x=-l} = \frac{\xi_2}{(1 + \tau_0^{\text{II}} s^\alpha / \alpha!)} \frac{d\bar{\theta}^{\text{II}}}{dx} \Big|_{x=-l} \quad (48)$$

$$\frac{\xi_2}{(1 + \tau_0^{\text{II}} s^\alpha / \alpha!)} \frac{d\bar{\theta}^{\text{II}}}{dx} \Big|_{x=l} = \frac{\xi_1}{(1 + \tau_0^{\text{I}} s^\alpha / \alpha!)} \frac{d\bar{\theta}^{\text{I}}}{dx} \Big|_{x=l} \quad (49)$$

由于在界面处位移连续,从而有

$$\bar{u}^{\text{I}} \Big|_{x=-l} = \bar{u}^{\text{II}} \Big|_{x=-l}, \quad \bar{u}^{\text{II}} \Big|_{x=l} = \bar{u}^{\text{III}} \Big|_{x=l} \quad (50)$$

由式(32)和(35),可得

$$\nabla \bar{\theta}^{\text{I}} = p_1 A_1 C_1 e^{-p_1 x} + p_1 A_1 C_2 e^{p_1 x} + p_2 A_2 C_3 e^{-p_2 x} + p_2 A_2 C_4 e^{p_2 x} \quad (51)$$

$$\nabla \bar{\theta}^{\text{II}} = q_1 D_1 E_1 e^{-q_1 x} + q_1 D_1 E_2 e^{q_1 x} + q_2 D_2 E_3 e^{-q_2 x} + q_2 D_2 E_4 e^{q_2 x} \quad (52)$$

由式(29)、(32)、(34)、(35)及式(48)~(52),得到方程组

$$q_1 D_1 E_1 e^{q_1 l} + q_1 D_1 E_2 e^{-q_1 l} + q_2 D_2 E_3 e^{q_2 l} + q_2 D_2 E_4 e^{-q_2 l} = \frac{\xi_1}{\xi_2} \frac{1 + \tau_0^{\text{II}} s^\alpha / \alpha!}{1 + \tau_0^{\text{I}} s^\alpha / \alpha!} (p_1 A_1 C_1 e^{p_1 l} + p_1 A_1 C_2 e^{-p_1 l} + p_2 A_2 C_3 e^{p_2 l} + p_2 A_2 C_4 e^{-p_2 l}) \quad (53)$$

$$q_1 D_1 E_1 e^{-q_1 l} + q_1 D_1 E_2 e^{q_1 l} + q_2 D_2 E_3 e^{-q_2 l} + q_2 D_2 E_4 e^{q_2 l} = \frac{\xi_1}{\xi_2} \frac{1 + \tau_0^{\text{II}} s^\alpha / \alpha!}{1 + \tau_0^{\text{I}} s^\alpha / \alpha!} (p_1 A_1 C_1 e^{-p_1 l} + p_1 A_1 C_2 e^{p_1 l} + p_2 A_2 C_3 e^{-p_2 l} + p_2 A_2 C_4 e^{p_2 l}) \quad (54)$$

$$E_1 e^{q_1 l} + E_2 e^{-q_1 l} + E_3 e^{q_2 l} + E_4 e^{-q_2 l} = C_1 e^{p_1 l} + C_2 e^{-p_1 l} + C_3 e^{p_2 l} + C_4 e^{-p_2 l} \quad (55)$$

$$E_1 e^{-q_1 l} + E_2 e^{q_1 l} + E_3 e^{-q_2 l} + E_4 e^{q_2 l} = C_1 e^{-p_1 l} + C_2 e^{p_1 l} + C_3 e^{-p_2 l} + C_4 e^{p_2 l} \quad (56)$$

通过对式(53)~(56)运用 Matlab 进行求解,便可得到 $E_i(s)$ ($i=1, 2, 3, 4$) 的解析表达式。至此,位移、温度和应力在拉普拉斯域内三明治板不同区域的解析解已全部求得。

4 拉普拉斯数值反变换

为求得各个变量的数值解,需采用拉氏反变换将拉氏域内求得的结果转化到时间域内。拉氏反变换公式如下:

$$f(t) = L^{-1} [F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} F(s) ds$$

在进行拉氏数值反变换时,应用了黎曼-刘维尔^[10]近似求和,即

<http://journal.seu.edu.cn>

$$f(x, t) = \frac{e^{\beta t}}{t} \left[\frac{1}{2} \bar{f}(x, \beta) + \text{Re} \sum_{n=1}^N \bar{f} \left(x, \beta + \frac{in\pi}{t} \right) (-1)^n \right]$$

式中, Re 为实部, i 为单位虚数,由文献[11]可知, $\beta t \approx 4.7$ 。

5 数值计算分析

计算中,在第 I 层和第 III 层区域选用固定的铜质材料进行计算分析;第 II 层区域热传导系数、密度和比热容的取值与第 I、III 层区域各参数按照一定比例选取,其他参数与第 I、III 层区域相同。三明治板各层材料特性参数为: $\lambda_0^{\text{I}} = \lambda_0^{\text{III}} = 77.6 \text{ GPa}$, $\mu_0^{\text{I}} = \mu_0^{\text{III}} = 38.6 \text{ GPa}$, $\tau_0^{\text{I}} = \tau_0^{\text{III}} = 0.05$, $\rho^{\text{I}} = 8954 \text{ kg/m}^3$, $C_E^{\text{I}} = 383.1 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$, $\kappa_0^{\text{I}} = 386 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$, $\kappa^{\text{II}} / \kappa^{\text{I}}$, $\rho^{\text{II}} / \rho^{\text{I}}$, $C_E^{\text{II}} / C_E^{\text{I}}$ 取值均为 0.5, 1.0, 2.0, $\alpha^{\text{I}} = \alpha^{\text{III}} = 1.78 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $T_0 = 293 \text{ K}$ 。其他参数分别为 $l = 1.0$, $\theta_0 = 1.0$ 。

在数值计算中,首先研究热传导系数、密度和比热容对热量沿三明治板厚度方向传输的影响,考虑三明治板第 II 层热传导系数、密度和比热容变化时,各变量的分布规律,选取 $t = 0.75$, 使 $\alpha = 0.25$, $\nu = 2.0$ 保持不变,当中间层材料热传导系数、密度和比热容减小时,分别取 $\kappa^{\text{II}} / \kappa^{\text{I}} = 0.5$, $\rho^{\text{II}} / \rho^{\text{I}} = 0.5$, $C_E^{\text{II}} / C_E^{\text{I}} = 0.5$ 。中间层材料热传导系数、密度和比热容增大时,分别选取 $\kappa^{\text{II}} / \kappa^{\text{I}} = 2.0$, $\rho^{\text{II}} / \rho^{\text{I}} = 2.0$, $C_E^{\text{II}} / C_E^{\text{I}} = 2.0$ 。将第 II 层与第 I、III 层热传导系数、密度和比热容完全相同 ($\kappa^{\text{II}} / \kappa^{\text{I}}$, $\rho^{\text{II}} / \rho^{\text{I}}$, $C_E^{\text{II}} / C_E^{\text{I}} = 1.0$) 时的温度、位移和应力分布曲线作为参考曲线进行对比(见图 2)。

然后,选取三明治板复合材料不同层间热传导系数、密度和比热容的比值 $\kappa^{\text{II}} / \kappa^{\text{I}} = 2.0$, $\rho^{\text{II}} / \rho^{\text{I}} = 2.0$, $C_E^{\text{II}} / C_E^{\text{I}} = 2.0$, 使 $t = 0.75$, $\nu = 2.0$, 考虑分数阶参数对各变量分布规律的影响。根据分数阶广义热弹性理论^[4-5], α 的取值范围一般为 0~1.0, 所以分数阶参数取值分别为 $\alpha = 0.25, 0.5$ 和 1.0。

最后,选取三明治板复合材料不同层间热传导系数、密度和比热容的比值 $\kappa^{\text{II}} / \kappa^{\text{I}} = 2.0$, $\rho^{\text{II}} / \rho^{\text{I}} = 2.0$, $C_E^{\text{II}} / C_E^{\text{I}} = 2.0$, 使 $t = 0.75$, $\alpha = 0.25$, 考虑温度相关性参数对各变量的影响,此时,令 $\nu = 1, 2, 3$ 。计算所得无量纲化的温度、位移和应力沿三明治板厚度方向的分布如图 2~图 4 所示。

图 2 显示了 $t = 0.75$, $\nu = 2.0$, $\alpha = 0.25$ 时,无量纲化的温度、位移和应力在三明治板第 II 层热传导系数、密度和比热容变化时的分布规律。由图 2(a) 和 (b) 可见,热传导系数、密度以及比热容的减小,均会导致温度的增加,反之则温度减小。热传导

系数变化对温度分布的影响较比热容和密度变化对温度分布的影响要小. 由图 2(c) ~ (d) 可以看出, 第 II 层热传导系数、密度和比热容发生变化时, 由于中间层的位移变化量很小, 所以可以不考虑对位移的

影响. 图 2(e) ~ (f) 显示了无量纲化应力的分布, 中间层热传导系数、密度和比热容增加时, 应力幅值减小, 当热传导系数、密度和比热容减小时, 则应力幅值增加. 所得结果与文献 [7-8] 结论一致.

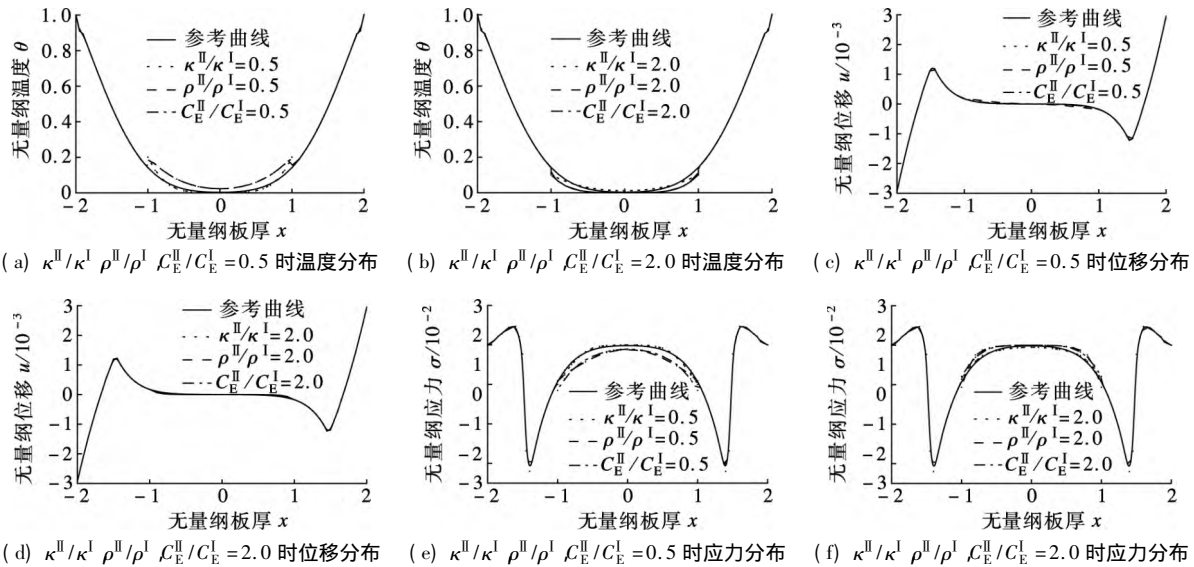


图 2 温度、位移及应力随中间层材料参数变化时的分布规律 ($t=0.75$ $\nu=2.0$ $\alpha=0.25$)

图 3 显示了第 II 层材料热传导系数、密度和比热容与第 I 层区域各参数比值为 $\kappa^{\text{II}}/\kappa^{\text{I}}=2.0$, $\rho^{\text{II}}/\rho^{\text{I}}=2.0$, $C_E^{\text{II}}/C_E^{\text{I}}=2.0$ $t=0.75$ $\nu=2.0$ 时无量纲化的温度、位移、应力随分数阶参数变化的分布规律. 图 3(a)、(c) 为无量纲温度和应力的分布, 从图中可以看出, 温度和应力幅值随分数阶参数增大而增大. 图 3(b) 为无量纲位移的分布, 随着分数

阶参数的增大, 位移幅值增大, 但是相对于温度和应力, 位移幅值增大幅度较小.

图 4 为第 II 层材料热传导系数、密度和比热容与第 I 层区域各参数比值为 $\kappa^{\text{II}}/\kappa^{\text{I}}=2.0$ $\rho^{\text{II}}/\rho^{\text{I}}=2.0$, $C_E^{\text{II}}/C_E^{\text{I}}=2.0$, 且 $t=0.75$ $\alpha=0.25$ 时无量纲化的温度、位移及应力随温度相关性参数变化时的分布规律. 由图 4(a) ~ (c) 可见, 材料温度相关

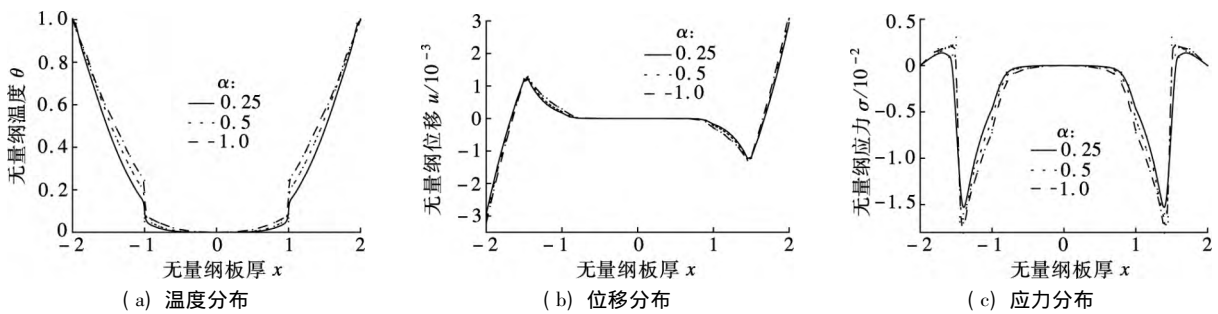


图 3 温度、位移及应力随分数阶参数 α 变化时的分布规律 ($\kappa^{\text{II}}/\kappa^{\text{I}}=2.0$ $\rho^{\text{II}}/\rho^{\text{I}}=2.0$ $C_E^{\text{II}}/C_E^{\text{I}}=2.0$ $t=0.75$ $\nu=2.0$)

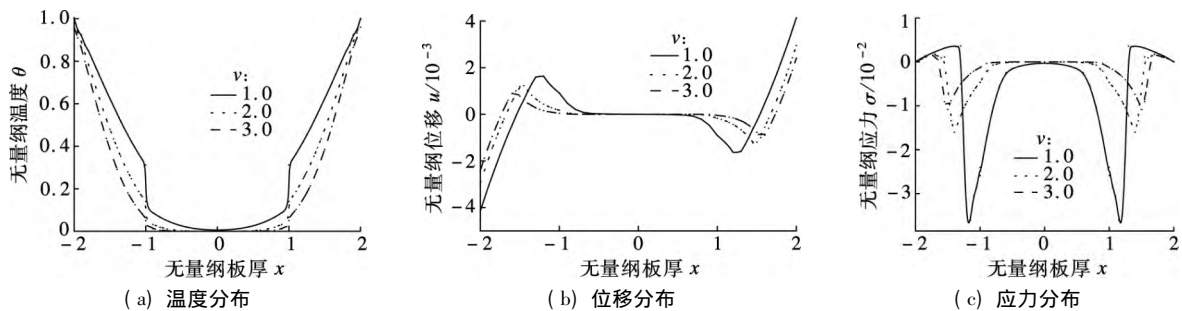


图 4 温度、位移及应力随温度相关参数 ν 变化时的分布规律 ($\kappa^{\text{II}}/\kappa^{\text{I}}=2.0$ $\rho^{\text{II}}/\rho^{\text{I}}=2.0$ $C_E^{\text{II}}/C_E^{\text{I}}=2.0$ $t=0.75$ $\alpha=0.25$)

性参数对各变量的分布有较大的影响。随着温度相关性参数的增大,温度、位移和应力的幅值均减小,其中温度和应力的减小程度最大。

6 结语

基于分数阶广义热弹性理论,探讨了在对称热冲击作用下,三明治板的分数阶广义热弹性问题。计算结果表明,中间层的温度、应力随热传导系数、密度以及比热容减小而增大,位移受到的影响较小;分数阶参数增大时,各变量的幅值呈现增大趋势;温度相关性参数的增大,会导致各变量绝对值幅度的减小,其中温度和应力的减小幅度较大。以上结果对在复杂热耦合条件下工作的三明治板设计具有指导意义。

参考文献 (References)

- [1] Lord H W , Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* , 1967 , **15** (5) : 299-309. DOI: 10.1016/0022-5096(67)90024-5.
- [2] Green A E , Lindsay K A. Thermoelasticity [J]. *Journal of Elasticity* , 1972 , **2** (1) : 1-7. DOI: 10.1007/bf00045689.
- [3] Sherief H H , El-Sayed A M A , Abd El-Latif A M. Fractional order theory of thermoelasticity [J]. *International Journal of Solids and Structures* , 2010 , **47** (2) : 269-275. DOI: 10.1016/j.ijsostr.2009.09.034.
- [4] Ezzat M A , El-Karamany A S , El-Bary A A. On thermo-viscoelasticity with variable thermal conductivity and fractional-order heat transfer [J]. *International Journal of Thermophysics* , 2015 , **36** (7) : 1684-1697. DOI: 10.1007/s10765-015-1873-8.
- [5] Aouadi M. Generalized thermo-piezoelectric problems with temperature-dependent properties [J]. *International Journal of Solids and Structures* , 2006 , **43** (21) : 6347-6358. DOI: 10.1016/j.ijsostr.2005.09.003.
- [6] Youssef H M , El-Bary A A. Thermal shock problem of a generalized thermoelastic layered composite material with variable thermal conductivity [J]. *Mathematical Problems in Engineering* , 2006 , **2006** : 1-14. DOI: 10.1155/mpe/2006/87940.
- [7] 熊启林,田晓耕,沈亚鹏,等.瞬态热冲击下层合材料板界面的热弹性行为 [J]. *力学学报* , 2011 , **43** (3) : 630-634.
Xiong Qilin , Tian Xiaogeng , Shen Yapeng , et al. Thermoelastic behavior of interface of composite plate under thermal shock [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics* , 2011 , **43** (3) : 630-634. (in Chinese)
- [8] Xue Z N , Yu Y J , Tian X G. Transient responses of bi-layered structure based on generalized thermoelasticity: Interfacial conditions [J]. *International Journal of Mechanical Sciences* , 2015 , **99** : 179-186. DOI: 10.1016/j.ijmesci.2015.05.016.
- [9] Rishin V V , Lyashenko B A , Akinin K G , et al. Temperature dependence of adhesion strength and elasticity of some heat-resistant coatings [J]. *Strength of Materials* , 1973 , **5** (1) : 123-126. DOI: 10.1007/bf00762888.
- [10] Durbin F. Numerical inversion of Laplace transforms: An effective improvement of Dubner and Abate's method [J]. *Computer Journal* , 1974 , **17** : 371-376. DOI: 10.1093/comjnl/17.4.371.
- [11] Honig G , Hirdes U. A method for the numerical inversion of Laplace transforms [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics* , 1984 , **10** : 113-132. DOI: 10.1016/0377-0427(84)90075-X.