

文章编号: 1673-5196(2021)06-0084-10

# 具有访问约束和随机时延的网络化 系统动态输出反馈控制

祝超群<sup>\*1,2,3</sup>, 张 磐<sup>1</sup>

(1. 兰州理工大学 电气工程与信息工程学院, 甘肃 兰州 730050; 2. 兰州理工大学 甘肃省工业过程先进控制重点实验室, 甘肃 兰州 730050; 3. 兰州理工大学 电气与控制工程国家级实验教学示范中心, 甘肃 兰州 730050)

**摘要:** 针对一类同时具有介质访问约束和随机时延的网络化控制系统, 研究了其中的动态输出反馈控制设计问题. 考虑到介质访问约束和随机时延的影响, 将系统建模为一类具有参数不确定性的马尔可夫跳变系统, 基于李雅普诺夫稳定性理论和 LMI 技术推导出系统稳定的充分条件, 并且设计了相应的动态输出反馈控制器, 使得闭环系统鲁棒稳定并具有给定的  $H_\infty$  性能, 最后通过仿真算例证明了所提出方法是有效的.

**关键词:** 网络化控制系统; 介质访问约束; 随机时延; 动态输出反馈

**中图分类号:** TP273 **文献标志码:** A

## Dynamic output feedback control of networked systems with access constraints and random delay

ZHU Chao-qun<sup>1,2,3</sup>, ZHANG Pan<sup>1</sup>

(1. College of Electrical and Information Engineering, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou 730050, China; 2. Key Laboratory of Gansu Advanced Control for Industrial Processes, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou 730050, China; 3. National Demonstration Center for Experimental Electrical and Control Engineering Education, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou 730050, China)

**Abstract:** The dynamic output feedback control problem is investigated for a class of random-delay networked control systems with medium access constraints. Considering the effects of medium access constraints and random delay, the systems are modelled as a class of Markov jump systems with parameter uncertainty. Based on Lyapunov stability theory and LMI technology, the sufficient conditions for stochastic stability are derived, and the corresponding dynamic output feedback controller is designed to make the closed-loop system robust stability with a given  $H_\infty$  performance. Finally, an illustrative example is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** networked control system; medium access constraints; random time-delay; dynamic output feedback

网络化控制系统 (networked control system, NCS) 是指通过通信网络将处在不同区域的控制器与传感器/执行器连接起来, 构成对被控对象实现控制的闭环反馈控制系统<sup>[1-4]</sup>. 与采用点对点控制方式的传统控制系统相比, NCS 具有成本低、布线少、易于扩展和维护、可靠性高以及便于远程操作等优点,

使得 NCS 在工业、交通和电力等领域得到了广泛应用. 当控制器与传感器/执行器通过通信网络交换数据时, 由于通信网络带宽有限, 在每个采样周期内只有部分传感器和执行器通过网络与远程控制器进行信息传输, 这一现象叫做介质访问约束. 由于控制系统具有实时性的特点, 介质访问约束的存在使得传感器的量测信号和执行机构的控制信号不能及时得到更新, 引起系统性能下降, 甚至会导致系统失稳. 为了解决这一问题, 需要采用有效的通信调度策略来充分利用有限的带宽资源.

国内外学者针对访问约束问题作了大量的研究工作, 并且取得了一些成果<sup>[5-7]</sup>. Brockett<sup>[8]</sup> 针对系统

收稿日期: 2020-08-09

基金项目: 国家自然科学基金(61563031, 61863026), 甘肃省高等学校产业支撑引导项目(2019C-05), 甘肃省工业过程先进控制重点实验室开放基金(2019KFJJ03)

通讯作者: 祝超群(1977-), 男, 新疆塔城人, 博士, 副教授.

Email: chaoqunzhu@yeah.net

中存在的介质访问约束问题,首次提出了采用通信序列来描述网络介质的访问顺序,对具有访问约束的系统进行通信调度.Walsh 等<sup>[9]</sup>基于反馈控制与实时调度理论,提出了一种静态与动态相结合的通信调度策略.Branicky 等<sup>[10]</sup>在事先完成控制器设计的情况下设计通信调度策略,该方法不仅适合于静态调度策略,而且适合于动态调度策略,但被控对象的选取会受到一定的限制,得到的结果具有较大的保守性.Hristu-Varsakelis 等<sup>[11]</sup>采用基于动态调度的通信策略序列,借助状态反馈信息在线确定传感器/控制器的介质访问序列,但他们只考虑了传感器端到控制器端的访问约束问题,忽略了控制器端到执行器端的介质访问约束现象.Guo 和祝超群等<sup>[12-13]</sup>将具有介质访问约束的 NCS 建模为马尔可夫跳变系统,并在此基础上采用状态反馈的方法完成了控制器的设计.上述研究都只是单独考虑了通信网络的介质访问约束问题,但在实际的 NCS 中,数据丢包、信号量化、诱导时延和访问约束等网络诱导现象往往是并存的.孙连坤等<sup>[14]</sup>针对具有访问约束的 NCS,研究了在随机通信调度策略下系统的稳定性问题,虽然控制器可以将系统状态收敛于一定区间内,但这并不是严格意义上的收敛.近年来,又有学者将网络中存在的介质访问约束处理为通信调度协议来解决这一问题,以避免网络传输过程中发生数据冲突.Zou 等<sup>[15]</sup>研究了具有随机调度协议的线性时变系统的  $H_\infty$  故障估计问题,设计了相应的时变故障估计器.Zou 等<sup>[16]</sup>研究了一类具有随机调度协议的线性时变系统的  $H_\infty$  控制问题,设计了相应的控制器,保证了闭环系统的鲁棒性能.Zou 等<sup>[17]</sup>研究了具有随机通信协议的线性时变系统滤波问题,采用递推滤波算法使得滤波误差的协方差最小来获得满意的滤波效果.Wang 等<sup>[18]</sup>研究了针对 TOD 协议复杂网络的滤波问题,最后设计了相应的  $H_\infty$  滤波器.

此外,由于网络负载的不规则变化,在 NCS 中不可避免地存在网络诱导时延,刘丽丽等<sup>[19-20]</sup>针对具有短时延的 NCS 控制问题进行了研究,将通信网络中的时变时延转变为系统矩阵的不确定参数,在此基础上进行系统稳定性分析,并设计了状态反馈控制器.Li 等<sup>[21]</sup>研究了一类具有短时延和随机数据包丢失的  $H_\infty$  控制器设计问题,利用李亚普诺夫稳定性理论给出了使系统指数均方稳定的充分条件.Zhang 等<sup>[22]</sup>研究了一类具有时变时延和随机丢包的  $H_\infty$  滤波器设计问题,但只对系统的输出进行了估计,并没有估计系统的状态.周颖等<sup>[23]</sup>研究了一

类具有时变短时延的量化反馈鲁棒控制问题,给出了系统稳定性的充分条件和鲁棒控制器的设计方法.杜明莉等<sup>[24]</sup>针对一类同时具有访问介质约束和随机时延的 NCS,提出了一种基于 TOD 动态通信调度与鲁棒  $H_\infty$  控制器的协同设计方法,采用状态反馈的方法得出了使系统具有  $H_\infty$  性能的控制律.

通过上述分析可知,目前关于访问约束的研究大多采用动态通信调度、静态通信调度和通信调度协议的方法,往往忽略了访问约束的随机特性,并且大多文献只单独考虑了通信网络中访问约束的问题,而很少考虑网络中的其他网络诱导因素,如网络时延、数据丢包和信号量化等.此外,大多数网络化系统控制综合都采用基于状态的控制方案,而在实际的系统控制中,系统状态很难通过直接测量获得.

基于上述存在的问题,本文针对同时具有随机时延和访问约束的 NCS,研究系统的动态输出反馈控制问题.首先根据介质访问约束和随机时延特性将系统建模为具有参数不确定性的马尔可夫跳变系统;其次,基于李雅普诺夫稳定性理论和 LMI 技术给出系统稳定的充分条件,并设计了动态输出反馈控制器使得闭环系统鲁棒稳定,且具有给定  $H_\infty$  性能;最后,通过仿真算例验证所提出方法的正确性和有效性.

## 1 问题描述

考虑如图 1 所示的 NCS,被控对象的连续时间系统模型为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + H_0\omega(t) \\ y(t) &= C_1x(t) + H_1\omega(t) \\ z(t) &= C_2x(t) + H_2\omega(t) \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $x(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbf{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbf{R}^r$ ,  $z(t) \in \mathbf{R}^v$  和  $\omega(t) \in \mathbf{R}^q$  分别表示被控对象的状态、控制输入、输出、被调输出以及有限能量的外部扰动;  $A$ 、 $B$ 、 $C_1$ 、 $C_2$ 、 $H_0$ 、 $H_1$  和  $H_2$  是具有相应维数的常数矩阵.

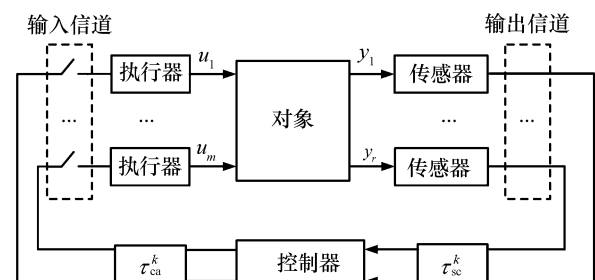


图 1 网络化控制系统模型

Fig.1 The model of networked control system

### 1.1 网络时延

由于通信网络的引入,输出信号和控制信号在传输中存在时延,  $\tau_k^{sc}$  和  $\tau_k^{ac}$  分别代表在第  $k$  时刻传感器与控制器之间和控制器与执行器之间的网络通信时延.为了简化分析,现对 NCS 作以下假设:

1) 传感器节点采用时间驱动,以周期  $T$  进行采样,控制器和执行器节点由事件驱动;

2) 在第  $k$  个时刻通信网络中存在传输时延,且  $\tau_k = \tau_k^{sc} + \tau_k^{ac}$ , 满足  $0 \leq \tau_k \leq T$ .

由以上假设可知,在一个采样周期中,执行器会输入两个不同的控制信号  $u(k)$  和  $u(k-1)$ , 即

$$u(t) = \begin{cases} u(k-1) & (t_k < t \leq t_k + \tau_k) \\ u(k) & (t_k + \tau_k < t \leq t_k + T) \end{cases} \quad (2)$$

综合考虑式(1)和式(2),则被控对象的离散化状态空间模型为

$$\begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_{d0}(\tau_k)u(k) + B_{d1}(\tau_k)u(k-1) + H_0 \omega(k) \\ y(k) = C_1 x(k) + H_1 \omega(k) \\ z(k) = C_2 x(k) + G_2 \omega(k) \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $A_d = e^{AT}$ ;  $B_{d0}(\tau_k) = \int_0^{T-\tau_k} e^{At} dt B$ ;  $B_{d1}(\tau_k) = \int_{T-\tau_k}^T e^{At} dt B$ . 显然,  $B_{d0}(\tau_k)$ 、 $B_{d1}(\tau_k)$  是时变的. 由矩阵理论知识可知,如果矩阵  $A$  包含  $n$  个互异的特征根,那么  $A$  可以化成对角阵;否则  $A$  可以化成约当标准型.假设  $A$  可以化为对角阵,则  $A = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  是  $A$  的特征值且  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n \neq 0$ ,  $P = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  是对应的特征向量.因此

$$B_{d0}(\tau_k) = \int_0^{T-\tau_k} e^{At} dt B = P \text{diag} \left( \int_0^{T-\tau_k} e^{\lambda_1 t} dt, \dots, \int_0^{T-\tau_k} e^{\lambda_n t} dt \right) P^{-1} B = B_0 + DF(\tau_k)E$$

其中:  $B_0 = P \text{diag}(-\lambda_1^{-1}, \dots, -\lambda_n^{-1}) P^{-1} B$   
 $D = P \text{diag}(\lambda_1^{-1} e^{\lambda_1 c_1}, \dots, \lambda_n^{-1} e^{\lambda_n c_n})$   
 $F(\tau_k) = \text{diag}(e^{\lambda_1(T-\tau_k-c_1)}, \dots, e^{\lambda_n(T-\tau_k-c_n)})$   
 $E = P^{-1} B$

$c_1, \dots, c_n$  的选择满足  $e^{\lambda_i(T-\tau_k-c_i)} < 1, i = 1, \dots, n$ .

同理,可以证明

$$B_{d1} = B_1 - DF(\tau_k)E$$

其中,  $B_1 = P \text{diag}(-\lambda_1^{-1} e^{\lambda_1 T}, \dots, -\lambda_n^{-1} e^{\lambda_n T}) P^{-1} B$ . 当  $A$  含有零特征根和  $r$  重根时,  $B_0$ 、 $B_1$ 、 $E$  的取值可参考文献[20].

### 1.2 介质访问约束

在 NCS 中,共有  $m$  个执行器和  $r$  个传感器.由于网络带宽的限制,每个采样周期内只有  $\mu$  个执行器能够获得通信信道,其中  $1 \leq \mu < m$ , 所以对于执行端而言,共有  $N = C_m^\mu$  种介质访问方式.为了更好地描述执行器的访问状态,定义二值函数  $\theta_i$ :

$$\theta_i = \begin{cases} 0, & u_i(k) = 0 \\ 1, & u_i(k) = \bar{u}_i(k) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4)$$

其中:  $u_i(k) = 0$  表示第  $i$  个执行器在  $k$  时刻未获得通信信道;同样,  $u_i(k) = \bar{u}_i(k)$  表示第  $i$  个执行器在  $k$  时刻获得了网络信道.在  $k$  时刻系统执行器的信道访问状态可用通信序列  $\theta(k) = [\theta_1(k), \theta_2(k), \dots, \theta_m(k)]^T$  来表示,记  $M_\theta(k) = \text{diag}\{\theta(k)\}$ , 则执行器端的控制输入可表示为

$$u(k) = M_\theta(k) \bar{u}(k) \quad (5)$$

假设在相邻的两个采样周期内  $M_i$  的切换服从马尔可夫随机过程,并且  $M_i$  从有限集合  $\{M_i\}_{i=1}^N$  中取值,满足以下条件概率:

$$\Pr\{M_\theta(k) = M_i\} = \pi_i(k)$$

$$\Pr\{M_\theta(k+1) = M_j \mid M_i\} = \pi_{ij}(k) > 0$$

其中:  $\pi_{ij}(k) > 0$  表示的是  $M_\theta(k)$  从模式  $i$  到模式  $j$  的转移概率,  $i, j \in N$ , 满足  $\sum_{j=1}^N \pi_{ij} = 1$ .

联立式(3)和式(5),可得具有随机时延和访问约束的网络化系统状态空间模型为

$$\begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_{d0}(\tau_k) M_\theta(k) u(k) + B_{d1}(\tau_k) M_\theta(k-1) u(k-1) + H_0 \omega(k) \\ y(k) = C_1 x(k) + H_1 \omega(k) \\ z(k) = C_2 x(k) + G_2 \omega(k) \end{cases} \quad (6)$$

对网络化系统(6)设计动态输出反馈控制器为

$$\begin{cases} x_c(k+1) = A_c x_c(k) + B_c y(k) \\ \bar{u}(k) = C_c x_c(k) \end{cases} \quad (7)$$

其中:  $x_c(k) \in \mathbf{R}^p$  ( $p \leq n$ ) 为控制器状态,当  $p = n$  时,对系统进行全阶动态补偿,当  $p < n$  时,进行降阶动态补偿;  $A_c$ 、 $B_c$ 、 $C_c$  是具有相应维数的常数矩阵.

综合考虑到式(6)和式(7),可得

$$\begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_{d0}(\tau_k) M_\theta(k) C_c x_c(k) + B_{d1}(\tau_k) M_\theta(k-1) C_c x_c(k-1) + H_0 \omega(k) \\ x_c(k+1) = A_c x_c(k) + B_c C x(k) + B_c H_1 \omega(k) \end{cases} \quad (8)$$

由于  $\tau_k$  是小于一个采样周期的不确定性时延,

$B_{d0}(\tau_k)$ 、 $B_{d1}(\tau_k)$  是随机矩阵,则离散化模型式(8)可等价

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_c(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & Q_1 \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k-1) \\ x_c(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_0 \\ B_c H_1 \end{bmatrix} \omega(k) \quad (9)$$

其中: $Q_1 = (B_0 + DF(\tau_k)E)M_\theta(k)C_c$ ;  $Q_2 = (B_1 - DF(\tau_k)E)M_\theta(k-1)C_c$ ;  $B_0$ 、 $B_1$ 、 $D$ 、 $E$  都是常数矩阵; $F(\tau_k)$  随  $\tau_k$  发生变化且满足  $F^T(\tau_k)F(\tau_k) \leq I$ .

可以看出,具有动态输出反馈控制的闭环网络化系统(9)是一个具有不确定参数的马尔可夫跳变系统.

## 2 主要结果

本节的目的是设计使闭环系统(9)具有扰动衰减率为  $\gamma$  的  $H_\infty$  鲁棒稳定控制律.为了便于描述,在下文中将  $M_\theta(k)$  和  $M_\theta(k-1)$  简写为  $M_i$  和  $M_{i-1}$ . 当  $\omega(k)=0$  时,闭环系统(9)可写为

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_c(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d & Q_1 \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k-1) \\ x_c(k-1) \end{bmatrix} \quad (10)$$

**定义 1** 当外部扰动  $\omega(k)=0$  时,对于含有随机时延  $\tau_k \in [0, T]$  且满足  $F^T(\tau_k)F(\tau_k) \leq I$  的闭环系统(9),如果存在一个李雅普诺夫函数  $V(\cdot) > 0$ ,且  $V(\cdot)$  沿系统的前向差分  $\Delta V(\cdot) < 0$ ,则称闭环系统(9)是鲁棒稳定的.

**定义 2** 对于闭环系统(9),如果该系统是鲁棒稳定的,并存在一个标量  $\gamma > 0$ ,在零初始条件下满足范数约束条件  $\|z(k)\|_2 \leq \gamma \|\omega(k)\|_2$ ,则称该系统是扰动衰减率为  $\gamma$  的  $H_\infty$  鲁棒稳定.

### 2.1 动态输出反馈控制器设计

为了便于后面的定理证明,先不加证明地给出以下引理.

**引理 1**(Schur 补性质) 给定矩阵  $X_1$ 、 $X_2$ 、 $X_3$ , 有  $X_1 = X_1^T$ ,  $X_2 = X_2^T > 0$ , 则  $X_1 + X_3^T X_2^{-1} X_3 < 0$  等价于

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_3^T \\ X_3 & -X_2 \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} -X_2 & X_3^T \\ X_3 & X_1 \end{bmatrix} < 0$$

**引理 2**(S-procedure) 对于实矩阵  $W$ 、 $M$ 、 $N$  和  $F(k)$ ,其中  $W$  是对称的,则不等式

$$W + MF(k)N + N^T F^T(k)M^T < 0$$

对于任意满足  $F^T(k)F(k) \leq I$  的  $F(k)$  都成立,当且仅当存在标量  $\epsilon > 0$ ,使得

$$W + \epsilon MM^T + \epsilon^{-1} NN^T < 0$$

**定理 1** 当  $\omega(k)=0$  时,对于闭环系统(9)若存

在对称正定矩阵  $\bar{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\bar{Z} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  和  $\bar{S} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , 以及标量  $\epsilon > 0, \epsilon_1 > 0$ ,使得以下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} N_{11} & 0 & 0 & N_{14} & 0 & 0 & N_{17} & 0 \\ * & N_{22} & 0 & N_{24} & N_{25} & N_{26} & 0 & 0 \\ * & * & N_{33} & N_{34} & N_{35} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & N_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & N_{55} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & N_{66} & 0 & N_{68} \\ * & * & * & * & * & * & N_{77} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & N_{88} \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

其中:

$$\begin{aligned} N_{11} &= -\bar{P}, & N_{14} &= \bar{P}A_d^T \\ N_{17} &= \bar{P}C^T, & N_{22} &= \bar{Z} - \bar{S} \\ N_{24} &= \bar{S}C_c^T M_{i-1}^T B_0^T, & N_{25} &= \bar{S}C_c^T M_i^T E^T \\ N_{26} &= \bar{S}A_c^T, & N_{33} &= -\bar{Z} \\ N_{34} &= \bar{S}C_c^T M_{i-1}^T B_1^T, & N_{35} &= \bar{S}C_c^T M_{i-1}^T E^T \\ N_{44} &= \epsilon DD^T - \bar{P}, & N_{55} &= -\epsilon I \\ N_{66} &= -\bar{S}, & N_{68} &= -\epsilon_1 B_c \\ N_{77} &= -\epsilon_1 I, & N_{88} &= -\epsilon_1 I \end{aligned}$$

则称闭环系统(9)是鲁棒稳定的.

**证明** 定义李雅普诺夫函数:

$$V(\cdot) = x^T(k)Px(k) + x_c^T(k)Sx_c(k) + x_c^T(k+1)Zx_c(k+1) \quad (12)$$

其中: $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{p \times p}$  和  $S \in \mathbb{R}^{p \times p}$  为对称正定矩阵.记  $Q_1 = (B_0 + DFE)M_i C_c$ ,  $Q_2 = (B_1 - DFE)M_{i-1} C_c$  和  $F = F(\tau_k)$ , 则有

$$\begin{aligned} \Delta V(\cdot) &= x^T(k+1)Px(k+1) + x_c^T(k+1)Sx_c(k+1) + x_c^T(k)Zx_c(k) - x^T(k)Px(k) - x_c^T(k)Sx_c(k) - x_c^T(k-1)Zx_c(k-1) = \\ &= x^T(k)A_d^T P A_d x(k) + x^T(k)A_d^T P Q_1 x_c(k) + x^T(k)A_d^T P Q_2 x_c(k-1) + x_c^T(k)Q_2^T P A_d x(k) + x_c^T(k)Q_1^T P Q_1 x_c(k) + x_c^T(k)Q_1^T P Q_2 x_c(k-1) + x_c^T(k-1)Q_2^T P Q_2 x(k) + x_c^T(k-1)Q_2^T P Q_1 x_c(k) + x_c^T(k-1)Q_2^T P Q_2 x_c(k-1) + x_c^T(k)A_c^T S A_c x_c(k) + x_c^T(k)A_c^T S B_c C x(k) + x^T(k)(B_c C)^T S A_c x_c(k) + x^T(k)(B_c C)^T S B_c C x(k) + x_c^T(k)Zx_c(k) - x^T(k)Px(k) - x_c^T(k)Sx_c(k) - \end{aligned}$$

$$x_c^T(k-1)Zx_c(k-1) = \eta^T \varphi \eta$$

其中:  $\eta = [x^T(k) \quad x_c^T(k) \quad x_c^T(k+1)]^T$

$$\varphi = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ * & \Omega_{21} & \Omega_{23} \\ * & * & \Omega_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{11} = A_d^T P A_d + C^T B_c^T S B_c C - P$$

$$\Omega_{12} = A_d^T P M_i + C^T B_c^T S A_c$$

$$\Omega_{13} = A_d^T P Q_2$$

$$\Omega_{22} = Q_1^T P Q_1 + A_c^T S A_c + Z - S$$

$$\Omega_{23} = Q_1^T P Q_2$$

$$\Omega_{33} = Q_2^T P Q_2 - Z$$

根据李雅普诺夫稳定性定理,当

$$\varphi = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ * & \Omega_{21} & \Omega_{23} \\ * & * & \Omega_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

时,该闭环系统稳定,则式(13)可以写成

$$\begin{bmatrix} C^T B_c^T S B_c C - P & C^T B_c^T S A_c & 0 \\ * & A_c^T S A_c + Z - S & 0 \\ * & * & -Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_d^T \\ Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} A_d^T \\ Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix}^T < 0 \quad (14)$$

对式(14)应用 Schur 补性质,可得

$$\begin{bmatrix} C^T B_c^T S B_c C - P & C^T B_c^T S A_c & 0 & A_d^T \\ * & A_c^T S A_c + Z - S & 0 & Q_1^T \\ * & * & -Z & Q_2^T \\ * & * & * & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

将  $Q_1$  和  $Q_2$  展开得

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & H_{14} \\ * & H_{22} & 0 & H_{24} \\ * & * & H_{33} & H_{34} \\ * & * & * & H_{44} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} 0 \\ C_c^T M_i^T E^T \\ -C_c^T M_{i-1}^T E^T \\ 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ C_c^T M_i^T E^T \\ -C_c^T M_{i-1}^T E^T \\ 0 \end{bmatrix} F^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D \end{bmatrix}^T < 0 \quad (15)$$

其中:

$$H_{11} = C^T B_c^T S B_c C - P, \quad H_{12} = C^T B_c^T S A_c$$

$$H_{14} = A_d^T, \quad H_{22} = A_c^T S A_c + Z - S$$

$$H_{24} = C_c^T M_i^T B_0^T, \quad H_{33} = -Z$$

$$H_{34} = C_c^T M_{i-1}^T B_1^T, \quad H_{44} = -P^{-1}$$

对式(15)应用 S-procedure,当且仅当存在标量

$\epsilon > 0$ ,使得

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & H_{14} \\ * & H_{22} & 0 & H_{24} \\ * & * & H_{33} & H_{34} \\ * & * & * & H_{44} \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D \end{bmatrix}^T + \epsilon^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ C_c^T M_i^T E^T \\ -C_c^T M_{i-1}^T E^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ EM_i C_c \\ -EM_{i-1} C_c \\ 0 \end{bmatrix}^T < 0$$

类似地,再次应用引理 1 和引理 2,可得

$$\begin{bmatrix} O_{11} & 0 & 0 & O_{14} & 0 & O_{16} \\ * & O_{22} & 0 & O_{24} & O_{25} & O_{26} \\ * & * & O_{33} & O_{34} & O_{35} & 0 \\ * & * & * & O_{44} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & O_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & O_{66} \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

其中:

$$O_{11} = -P, \quad O_{14} = A_d^T$$

$$O_{16} = C^T B_c^T, \quad O_{22} = Z - S$$

$$O_{24} = C_c^T M_i^T B_0^T, \quad O_{25} = C_c^T M_i^T E^T$$

$$O_{26} = A_c^T, \quad O_{33} = -Z$$

$$O_{34} = C_c^T M_{i-1}^T B_1^T, \quad O_{35} = -C_c^T M_{i-1}^T E^T$$

$$O_{44} = \epsilon D D^T - P^{-1}, \quad O_{55} = -\epsilon I$$

$$O_{66} = -S^{-1}$$

将式(16)左乘、右乘  $\text{diag}\{P^{-1}, S^{-1}, S^{-1}, I, I, I\}$ ,令  $\bar{P} = P^{-1}, \bar{S} = S^{-1}, \bar{Z} = S^{-1} Z S^{-1}$ ,再次应用 Schur 补性质和 S-procedure 可得式(11),定理 1 得证.

**定理 2** 当  $\omega(k) = 0$  时,对于闭环系统(9),若

存在对称正定矩阵  $\bar{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \bar{Z} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  和  $\bar{S} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , 矩阵  $W \in \mathbb{R}^{r \times p}, N \in \mathbb{R}^{p \times p}, Y \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,以及标量  $\epsilon > 0$  和  $\epsilon_1 > 0$ ,使得以下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & 0 & 0 & \Upsilon_{14} & 0 & 0 & \Upsilon_{17} & 0 \\ * & \Upsilon_{22} & 0 & \Upsilon_{24} & \Upsilon_{25} & \Upsilon_{26} & 0 & 0 \\ * & * & \Upsilon_{33} & \Upsilon_{34} & \Upsilon_{35} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Upsilon_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Upsilon_{55} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Upsilon_{66} & 0 & \Upsilon_{68} \\ * & * & * & * & * & * & \Upsilon_{77} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \Upsilon_{88} \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

其中:

$$\Upsilon_{11} = -\bar{P}, \quad \Upsilon_{14} = \bar{P} A_d^T$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{17} &= \bar{P}C^T, \quad \Upsilon_{22} = \bar{Z} - \bar{S} \\ \Upsilon_{24} &= W^T M_i B_0^T, \quad \Upsilon_{25} = W^T M_i E^T \\ \Upsilon_{26} &= N^T, \quad \Upsilon_{33} = -\bar{Z} \\ \Upsilon_{34} &= W^T M_j B_1^T, \quad \Upsilon_{35} = W^T M_j E^T \\ \Upsilon_{44} &= \epsilon DD^T - \bar{P}, \quad \Upsilon_{55} = -\epsilon I \\ \Upsilon_{66} &= -\bar{S}, \quad \Upsilon_{68} = Y^T \\ \Upsilon_{77} &= -\epsilon_1 I, \quad \Upsilon_{88} = -\epsilon_1 I \end{aligned}$$

则动态输出反馈控制律(7)可使闭环系统(9)鲁棒稳定.当式(17)有可行解时,由  $A_c = N/\bar{S}, B_c = Y^T/\epsilon_1$  和  $C_c = W/\bar{S}$  可得动态输出反馈控制律.

证明 令  $N = A_c \bar{S}, W = C_c \bar{S}, Y = \epsilon_1 B_c^T$ , 代入式(11)可得到式(17).定理 2 得证.

### 2.2 网络化系统控制系统 $H_\infty$ 性能

当  $\omega(k) \neq 0$  时,对闭环系统(9)进行稳定性分析,并设计抗扰动衰减率为  $\gamma$  的  $H_\infty$  鲁棒控制器.

定理 3 当系统外部扰动  $\omega(k) \neq 0$  时,对于闭环系统(9),给定的衰减率  $\gamma > 0$ ,若存在对称正定矩阵  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}, Z \in \mathbb{R}^{p \times p}, S \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,标量  $\lambda_1$ ,使得以下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} V_{11} & 0 & 0 & V_{14} & V_{15} & V_{16} & 0 \\ * & V_{22} & 0 & 0 & V_{25} & V_{26} & V_{27} \\ * & * & V_{33} & 0 & V_{35} & 0 & V_{37} \\ * & * & * & V_{44} & V_{45} & V_{46} & 0 \\ * & * & * & * & V_{55} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & V_{66} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & V_{77} \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

其中:

$$\begin{aligned} V_{11} &= -P + C_2^T C_2, \quad V_{14} = C_2^T H_2 \\ V_{15} &= A_d^T, \quad V_{16} = C_1^T B_c^T \\ V_{22} &= Z - S, \quad V_{25} = C_c^T B_0^T \\ V_{26} &= A_c^T, \quad V_{27} = C_c^T M_i^T E^T \\ V_{33} &= -Z, \quad V_{35} = C_c^T B_1^T \\ V_{37} &= -C_c^T M_j^T E^T, \quad V_{44} = H_2^T H_2 - \gamma^2 I \\ V_{45} &= H_0^T, \quad V_{46} = H_1^T B_c^T \\ V_{55} &= \lambda_1^T DD^T - P^{-1}, \quad V_{66} = -S^{-1} \\ V_{77} &= -\lambda_1 I \end{aligned}$$

则称闭环系统(9)为抗扰动衰减率  $\gamma$  的  $H_\infty$  鲁棒稳定.

证明 设

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} [z^T(k)z(k) - \gamma^2 \omega^T(k)\omega(k)]$$

为了得到结果,要使  $z(k)$  满足  $H_\infty$  范数约束条件  $\|z(k)\|_2 \leq \gamma^2 \|\omega(k)\|_2$ , 则  $\psi \leq 0$ .选择李雅普诺夫函数(12),当 NCS 稳定时李雅普诺夫函数的前向差分  $\Delta V(\cdot) < 0$ ,在零初始条件下,对于任意  $\omega(k) \in [0, \infty)$ ,则有

$$\psi \leq \sum_{k=0}^{\infty} [z^T(k)z(k) - \gamma^2 \omega^T(k)\omega(k) + \Delta V(k)] \quad (19)$$

考虑闭环系统(9),有

$$z^T(k)z(k) - \gamma^2 \omega^T(k)\omega(k) + \Delta V(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \\ x_c(k-1) \\ \omega(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ * & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ * & * & R_{33} & R_{34} \\ * & * & * & R_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \\ x_c(k-1) \\ \omega(k) \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中:

$$\begin{aligned} R_{11} &= A_d^T P A_d + C_1^T B_c^T S B_c C_1 - P + C_2^T C_2 \\ R_{12} &= A_d^T P Q_1 + C_1^T B_c^T S A_c \\ R_{13} &= A_d^T P Q_2 \\ R_{14} &= A_d^T P H_0 + C_1^T B_c^T S B_c H_1 + C_2^T H_2 \\ R_{22} &= Q_1^T P Q_1 + A_c^T S A_c + Z - S \\ R_{23} &= Q_1^T P Q_2 \\ R_{24} &= Q_1^T P H_0 + A_c^T S B_c H_1 \\ R_{33} &= Q_2^T P Q_2 - Z \\ R_{34} &= Q_2^T P H_0 \\ R_{44} &= H_0^T P H_0 + C_1^T B_c^T S B_c H_1 + H_2^T H_2 - \gamma^2 I \end{aligned}$$

设  $\delta^T(k) = [x^T(k) \quad x_c^T(k) \quad x^T(k-1) \quad \omega^T(k)]$ , 则式(19)为

$$\psi \leq \sum_{k=0}^{\infty} [\delta^T(k)\varphi\delta(k)]$$

当需要  $\psi \leq 0$  时,只需  $\varphi < 0$  即可,即有

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ * & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ * & * & R_{33} & R_{34} \\ * & * & * & R_{44} \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

式(21)可写为

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 & G_{14} \\ * & G_{22} & 0 & G_{24} \\ * & * & G_{33} & 0 \\ * & * & * & G_{44} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_d^T \\ Q_1^T \\ Q_2^T \\ H_0^T \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} A_d^T \\ Q_1^T \\ Q_2^T \\ H_0^T \end{bmatrix}^T < 0 \quad (22)$$

其中:

$$G_{11} = C_1^T B_c^T S B_c C_1 - P + C_2^T C_2$$

$$\begin{aligned}
G_{12} &= C_1^T B_c^T S A_c, \quad G_{33} = -Z \\
G_{14} &= C_1^T B_c^T S B_c H_1 + C_2^T H_2 \\
G_{22} &= A_c^T S A_c + Z - S \\
G_{24} &= A_c^T S B_c H_1 \\
G_{44} &= C_1^T B_c^T S B_c H_1 + H_2^T H_2 - \gamma^2 I
\end{aligned}$$

对式(22)使用 Schur 补性质, 可得

$$\begin{bmatrix}
I_{11} & I_{12} & 0 & I_{14} & I_{15} \\
* & I_{22} & 0 & I_{24} & I_{25} \\
* & * & I_{33} & 0 & I_{35} \\
* & * & * & I_{44} & I_{45} \\
* & * & * & * & I_{55}
\end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

其中:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= C_1^T B_c^T S B_c C_1 - P + C_2^T C_2 \\
I_{12} &= C_1^T B_c^T S A_c, \quad I_{15} = A_d^T \\
I_{14} &= C_1^T B_c^T S B_c H_1 + C_2^T H_2 \\
I_{22} &= A_c^T S A_c + Z - S \\
I_{24} &= A_c^T S B_c H_1, \quad I_{25} = Q_1^T \\
I_{33} &= -Z, \quad I_{35} = Q_2^T \\
I_{44} &= C_1^T B_c^T S B_c H_1 + H_2^T H_2 - \gamma^2 I \\
I_{45} &= H_0^T, \quad I_{55} = -P^{-1}
\end{aligned}$$

对式(23)采用与式(14)同样的处理方法, 依次使用 Schur 补性质、S-procedure 和 Schur 补性质可得

$$\begin{bmatrix}
U_{11} & 0 & 0 & U_{14} & U_{15} & U_{16} & 0 \\
* & U_{22} & 0 & 0 & U_{25} & U_{26} & U_{27} \\
* & * & U_{33} & 0 & U_{35} & 0 & U_{37} \\
* & * & * & U_{44} & U_{45} & U_{46} & 0 \\
* & * & * & * & U_{55} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & U_{66} & 0 \\
* & * & * & * & * & * & U_{77}
\end{bmatrix} < 0 \quad (24)$$

其中:

$$\begin{aligned}
U_{11} &= -P + C_2^T C_2, \quad U_{14} = C_2^T H_2 \\
U_{15} &= A_d^T, \quad U_{16} = C_1^T B_c^T \\
U_{22} &= Z - S, \quad U_{25} = C_c^T B_0^T \\
U_{26} &= A_c^T, \quad U_{27} = C_c^T M_i^T E^T \\
U_{33} &= -Z, \quad U_{35} = C_1^T B_c^T \\
U_{37} &= -C_c^T M_{i-1}^T E^T, \quad U_{44} = H_2^T H_2 - \gamma^2 I \\
U_{45} &= H_0^T, \quad U_{46} = (B_c H_1)^T \\
U_{55} &= \lambda_1 D D^T - P^{-1}, \quad U_{66} = -S^{-1} \\
U_{77} &= -\lambda_1 I
\end{aligned}$$

定理 3 得证.

定理 4 对于闭环系统(9), 若存在对称正定矩

阵  $P, S, Z$ , 适当维数矩阵  $K_1, K_2, Y$ , 标量  $\lambda_1, \lambda_2$  和  $\zeta$ , 使得以下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix}
Z_{11} & 0 & 0 & 0 & Z_{15} & 0 & 0 & Z_{18} & Z_{19} & 0 \\
* & Z_{22} & 0 & 0 & Z_{25} & Z_{26} & Z_{27} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & Z_{33} & 0 & Z_{35} & 0 & Z_{37} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & Z_{44} & Z_{45} & 0 & 0 & Z_{48} & Z_{49} & 0 \\
* & * & * & * & Z_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & Z_{66} & 0 & 0 & 0 & Z_{610} \\
* & * & * & * & * & * & Z_{77} & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & Z_{88} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & Z_{99} & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & Z_{1010}
\end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

其中:

$$\begin{aligned}
Z_{11} &= -P, \quad Z_{15} = P A_d^T \\
Z_{18} &= P C_2^T, \quad Z_{19} = P C_1^T \\
Z_{22} &= Z - S, \quad Z_{25} = K_1^T M_i B_0^T \\
Z_{26} &= K_2^T, \quad Z_{27} = K_1^T M_i E^T \\
Z_{33} &= -Z, \quad Z_{35} = K_1^T M_{i-1} B_1^T \\
Z_{37} &= -K_1^T M_{i-1} E^T, \quad Z_{44} = -\zeta I \\
Z_{45} &= H_0^T, \quad Z_{48} = H_2^T \\
Z_{49} &= H_1^T, \quad Z_{55} = \lambda_1 D D^T - P \\
Z_{66} &= -S, \quad Z_{610} = Y^T \\
Z_{77} &= -\lambda_1 I, \quad Z_{88} = -I, \\
Z_{99} &= -\lambda_2 I, \quad Z_{1010} = -\lambda_2 I
\end{aligned}$$

则称闭环系统(9)  $H_\infty$  鲁棒稳定, 并且  $H_\infty$  扰动的衰减度为  $\gamma$ .

当式(25)有可行解时, 由  $A_c = K_2 S^{-1}, B_c = \lambda_1^{-1} Y^T$  和  $C_c = K_1 S^{-1}$  可得出系统具有  $H_\infty$  性能的鲁棒镇定控制律. 定理 4 的证明与定理 2 证明类似, 此处不再赘述.

### 3 仿真实例

考虑如下参数的被控对象:

$$\begin{aligned}
A_d &= \begin{bmatrix} 0.31 & 0.22 \\ 0.32 & 0.28 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.25 \\ 0.16 & 0.06 \end{bmatrix} \\
B_1 &= \begin{bmatrix} 0.12 & 0.20 \\ 0.15 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0.20 & 0 \\ 0.40 & 0 \end{bmatrix} \\
C_2 &= \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.10 & 0 \\ 0 & 0.10 \end{bmatrix} \\
E &= \begin{bmatrix} 0.10 & 0.20 \\ 0.30 & 0.10 \end{bmatrix}, \quad H_0 = \begin{bmatrix} 0.10 & 0 \\ 0.10 & 0.10 \end{bmatrix} \\
H_1 &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

假设网络中存在随机时延  $\tau_k \in [0 \ T]$ , 这里考虑在任意一个采样周期内执行器和控制器只有一个通信信道可以进行控制命令的传输, 则访问介质序列集为

$$\{W_1, W_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

且有  $M_j, M_i \in \{W_1 \ W_2\}$ , 介质访问序列模态切换概率转移矩阵为

$$\pi = \begin{bmatrix} 0.726 \ 5 & 0.273 \ 5 \\ 0.301 \ 9 & 0.698 \ 1 \end{bmatrix}$$

假设系统的初始状态为  $x_0 = [4 \ -1]^T$ , 采样周期为 1 ms, 根据定理 1 和定理 2, 利用 LMI 工具箱解得动态输出反馈控制律为

$$A_{c1} = \begin{bmatrix} 0.266 \ 7 & 0 \\ 0 & 0.266 \ 7 \end{bmatrix}$$

$$B_{c1} = \begin{bmatrix} 0.333 \ 3 & 0 \\ 0 & 0.333 \ 3 \end{bmatrix}$$

$$C_{c1} = \begin{bmatrix} 0.509 \ 6 & 0 \\ 0 & 0.800 \ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{c2} = \begin{bmatrix} 0.266 \ 7 & 0 \\ 0 & 0.266 \ 7 \end{bmatrix}$$

$$B_{c2} = \begin{bmatrix} 0.333 \ 3 & 0 \\ 0 & 0.333 \ 3 \end{bmatrix}$$

$$C_{c2} = \begin{bmatrix} 0.800 \ 0 & 0 \\ 0 & 0.566 \ 5 \end{bmatrix}$$

图 2 是通信网络中存在的随机时延; 图 3 是执行器端介质访问序列的模态切换曲线, 其中曲线值为 1 表明在该采样周期采用介质访问序列模态  $W_1$ , 曲线值为 2 表明采用介质访问序列模态  $W_2$ , 此时闭环系统(9)的状态轨迹如图 4 所示. 由图 4 可以看出, 在给定的初始条件下, 同时具有访问约束和随机时延的闭环系统在动态输出反馈控制器的作用下, 可以保证随机稳定性, 且具有良好的动态性能.

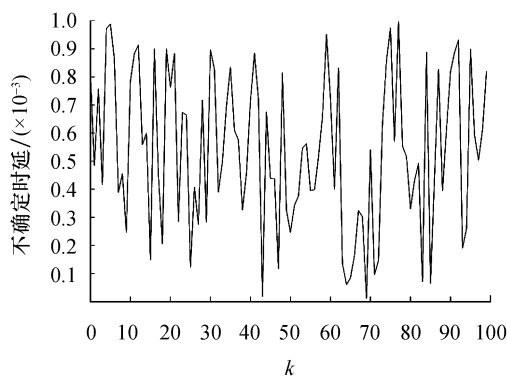


图 2 随机时延

Fig.2 The random time-delay

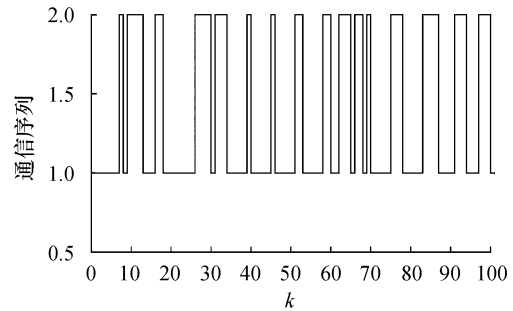


图 3 介质访问序列切换模态

Fig.3 The switch trajectory of medium access sequence

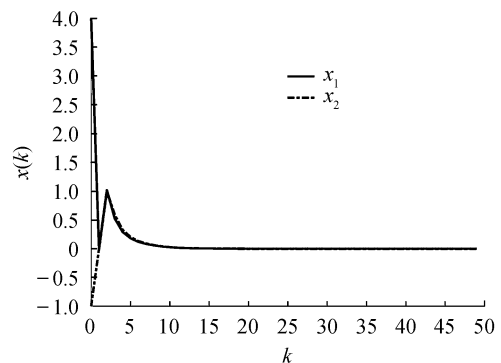


图 4 无扰动下的状态轨迹图

Fig.4 The state trajectory without perturbation

在零初始条件下, 即在  $x_0 = [0 \ 0]^T$  的情况下, 加入如下的外部扰动:

$$\omega(k) = \begin{cases} 0 & (\text{其他时刻}) \\ [\sin(0.25k) \ \sin(0.25k)]^T & (15 \leq k \leq 35) \end{cases}$$

根据定理 3 和定理 4, 利用 LMI 工具箱, 解得  $H_\infty$  扰动衰减度  $\gamma = \sqrt{\mu} = 8.672 \ 3$ , 相应的动态输出反馈控制律为

$$A'_{c1} = \begin{bmatrix} 0.270 \ 1 & 0 \\ 0 & 0.296 \ 6 \end{bmatrix}$$

$$B'_{c1} = \begin{bmatrix} 2.296 \ 3 & 0 \\ 0 & 2.183 \ 3 \end{bmatrix}$$

$$C'_{c1} = \begin{bmatrix} 0.034 \ 2 & 0 \\ 0 & 0.607 \ 5 \end{bmatrix}$$

$$A'_{c2} = \begin{bmatrix} 0.296 \ 6 & 0 \\ 0 & 0.268 \ 9 \end{bmatrix}$$

$$B'_{c2} = \begin{bmatrix} 2.067 \ 4 & 0 \\ 0 & 2.181 \ 7 \end{bmatrix}$$

$$C'_{c2} = \begin{bmatrix} 0.607 \ 2 & 0 \\ 0 & 0.026 \ 5 \end{bmatrix}$$



图 5 给出的是  $\omega(k) \neq 0$  时的介质访问序列切换模式曲线,此时系统状态轨迹如图 6 所示.从图 6 可以看出,在动态输出反馈控制器的作用下,闭环网络化系统(9)具有扰动衰减度  $\gamma$  的  $H_\infty$  性能.

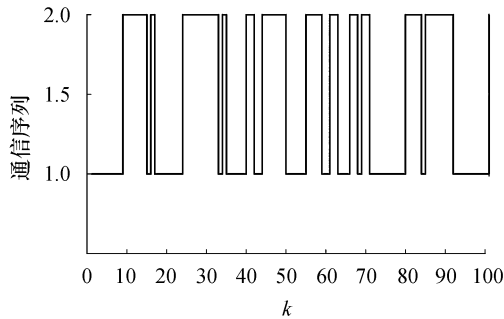


图 5 扰动情况下介质访问序列切换模式  
Fig.5 The switch trajectory of medium access sequence under perturbation

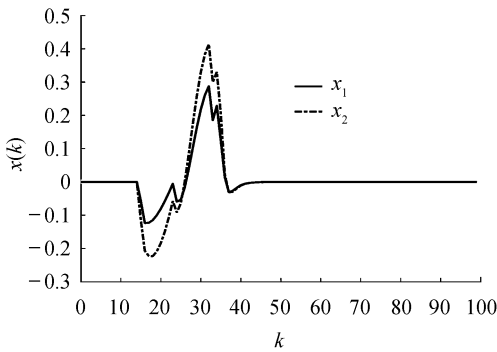


图 6 具有  $H_\infty$  性能的系统状态轨迹  
Fig.6 The state trajectories with  $H_\infty$  performance

为了说明本文设计方法的优越性,在同样的初始条件和外部扰动时,分别采用本文和文献[12]的控制方案进行仿真,对应的系统状态输出如图 7 和图 8 所示.表 1 给出了两种控制方案下系统的二次型性能指标.通过比较可以看出,本文的控制方案具有更加优越的控制性能.

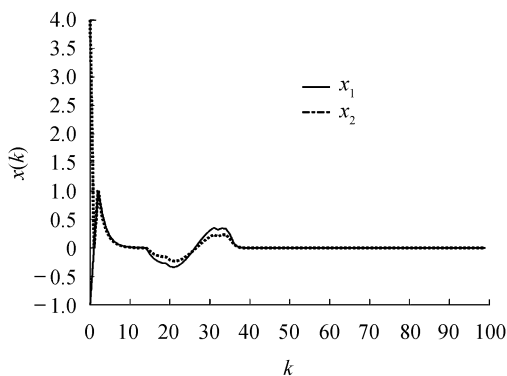


图 7 系统状态轨迹  
Fig.7 The state trajectories

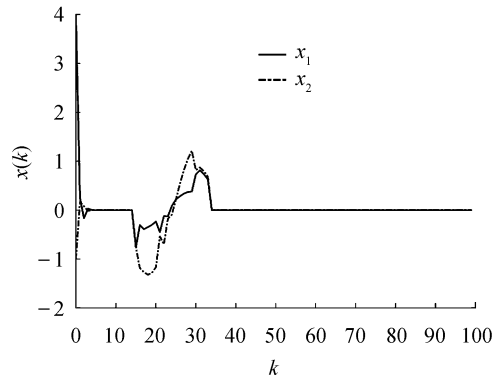


图 8 文献[12]状态轨迹  
Fig.8 The state trajectories of reference [12]

表 1 二次型性能指标比较

Tab.1 Comparison of quadratic performance costs

控制方案	状态项指标	控制项指标	二次型性能指标
本文	19.94	0.67	20.61
文献[12]	36.32	1.53	37.85

#### 4 结论

当前大多数研究都是将介质访问约束和网络诱导时延问题独立起来进行研究,这与网络控制实践具有一定的差距.此外,大多数网络化系统控制综合都采用基于状态的控制方案,而在实际的系统控制中系统的输出信号更容易获得.因此,本文针对同时具有随机时延和介质访问约束的 NCS,研究了系统的动态输出反馈控制设计问题.一方面,由于网络带宽有限,在每个采样周期内只有部分执行器通过网络与控制器进行通信,未能获得信道访问权的执行器输入被置为零值.另一方面,针对 NCS 中存在的随机时延,将其建模为系统矩阵的不确定性.结合上述两个方面,根据执行器和控制器之间访问约束的随机特性,将网络化系统建模为一类具有参数不确定性的马尔可夫跳变系统,进而基于李雅普诺夫稳定性理论和 LMI 方法导出使闭环系统稳定的充分条件,设计满足  $H_\infty$  扰动衰减度的动态输出反馈控制器,使得闭环网络化系统随机稳定并具有良好的鲁棒性能.

#### 参考文献:

[1] RAY A, HALEVI Y. Integrated communication and control systems: Part II -Design considerations [J]. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1998, 110(4): 374-381.  
[2] NILSSON J. Real-time control systems with delays [D]. Lund: Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, 1998.

- [3] ZHANG W, BRANICKY M S, PHOLIPS S M. Stability of networked control system [J]. IEEE Control Systems Magazine, 2001, 21(1): 84-99.
- [4] WALSH G C, YE H, BUSHNELL L G. Stability analysis of networked control systems [J]. Computer Engineering & Applications, 2002, 10(3): 438-446.
- [5] ISHII H.  $H_\infty$  control with limited communication and message losses [J]. Systems & Control Letters, 2008, 57(4): 322-331.
- [6] ZHANG W A, YU L, FENG G. Optimal linear estimation for networked systems with communication constraints [J]. Automatica, 2011, 47(9): 1992-2000.
- [7] LONGO S, HERRMANN G, BARBER P. Robust scheduling of sampled-data networked control systems [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2012, 20(6): 1613-1621.
- [8] BROCKETT R. Stabilization of motor networks [C]//Proceeding of the 34th IEEE Conference on Decision and Control. Piscataway NJ, USA; [s.n.], 1995: 1484-1488.
- [9] WALSH G C, YE H. Scheduling of networked control systems [J]. IEEE Control System Magazine, 2001, 21(1): 57-65.
- [10] BRANICKY M S, PHILLIPS S M, ZHANG W. Scheduling and feedback co-design for networked control systems [C]//Proceeding of the 41th IEEE Conference on Decision and Control. Las Vegas; [s.n.], 2002: 1211-1216.
- [11] HRISTU-VARSAKELIS D, MORGANSEN K. Limited communication control [J]. Systems and Control Letters, 1999, 37(4): 193-205.
- [12] GUO G, LU Z B. Markov actuator assignment for networked control systems [J]. European Journal of Control, 2012, 8(4): 323-330.
- [13] 祝超群, 杨彬, 鲁春燕, 等. 具有通信约束的网络控制系统鲁棒  $H_\infty$  控制 [J]. 兰州理工大学学报, 2016, 42(6): 87-93.
- [14] 孙连坤, 万振凯, 张桂玲. 具有随机通信逻辑的网络控制系统的稳定性分析 [J]. 控制与决策, 2010, 25(9): 1302-1306.
- [15] ZOU L, WANG Z, ZHOU D. Finite-horizon  $H_\infty$  fault estimation for time-varying systems with random access protocol [J]. IFAC Papers Online, 2018, 51(9): 314-319.
- [16] ZOU L, WANG Z, ZHOU D. Observer-based  $H_\infty$  control of networked systems with stochastic communication protocol: the finite-horizon case [J]. Automatica, 2016, 63(6): 366-373.
- [17] ZOU L, WANG Z, HAN Q L. Recursive filtering for time-varying systems with random access protocol [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(2): 720-727.
- [18] WANG D, WANG Z D, SHEN B, *et al.*  $H_\infty$  finite-horizon filtering for complex networks with states saturations: The weighted try-once discard protocol [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2019, 29(11): 246-258.
- [19] 刘丽丽, 张庆灵, 杜昭平. 具有时延的广义网络控制系统的鲁棒  $H_\infty$  控制 [J]. 东北大学学报(自然科学版), 2008, 29(7): 917-919.
- [20] 樊卫华, 胡维礼. 时延网络控制系统的稳定性 [J]. 控制理论与应用, 2004, 21(6): 880-884.
- [21] LI Z, ZHANG L, YU B, *et al.*  $H_\infty$  control for a kind of networked control systems with network induced time delay and data packet dropout [C]//2018 International Conference on Control, Automation and Information Sciences (ICCAIS). Zhengzhou; [s.n.], 2018: 376-385.
- [22] ZHANG D, GEORGE N.  $H_\infty$  filtering for stochastic networked control systems with time delays and packet dropout [C]//2020 Chinese Control and Decision Conference (CCDC). Hefei; [s.n.], 2020: 676-686.
- [23] 周颖, 刘璐璐, 韩鹭. 基于量化依赖 Lyapunov 函数的时变时延网络控制系统的鲁棒控制 [J]. 南京邮电大学学报(自然科学版), 2020, 40(4): 57-63.
- [24] 杜明莉, 周川, 陈庆伟, 等. 具有通信约束的网络控制系统动态调度  $H_\infty$  控制协同设计 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(9): 1132-1138.