

计算机集成制造系统
Computer Integrated Manufacturing Systems
ISSN 1006-5911, CN 11-5946/TP

《计算机集成制造系统》网络首发论文

题目: 含运动副间隙的 6-RSS 并联机器人弹性动力学建模与分析
作者: 王林军, 徐博, 郑敏, 朱宗孝, 张东
收稿日期: 2021-10-19
网络首发日期: 2021-12-29
引用格式: 王林军, 徐博, 郑敏, 朱宗孝, 张东. 含运动副间隙的 6-RSS 并联机器人弹性动力学建模与分析[J/OL]. 计算机集成制造系统.
<https://kns.cnki.net/kcms/detail/11.5946.tp.20211228.1404.018.html>



网络首发: 在编辑部工作流程中, 稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定, 且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式(包括网络呈现版式)排版后的稿件, 可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定; 学术研究成果具有创新性、科学性和先进性, 符合编辑部对刊文的录用要求, 不存在学术不端行为及其他侵权行为; 稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准, 正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性, 录用定稿一经发布, 不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容, 只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认: 纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊(光盘版)》电子杂志社有限公司签约, 在《中国学术期刊(网络版)》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版, 以单篇或整期出版形式, 在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊(网络版)》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物(ISSN 2096-4188, CN 11-6037/Z), 所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

含运动副间隙的 6-RSS 并联机器人弹性动力学建模与分析

王林军^{1,2}, 徐博¹, 郑敏¹, 朱宗孝¹, 张东²

(1.兰州理工大学 机电工程学院, 甘肃 兰州 730050; 2.兰州理工大学 西部能源与环境研究中心, 甘肃 兰州 730050)

摘要: 为了提高空间六自由度并联机器人动力学模型的精度, 以 6-RSS 并联机器人(R: 转动副, S: 球面副)为研究对象, 提出一种将支链弹性变形和运动副间隙随机变化相结合的动力学建模方法。首先, 根据几何结构与初始状态, 开展理想条件下的运动学分析。利用数理统计原理和符号函数建立含间隙的转动副与球面副运动学模型, 进而计算杆件虚长度和各个运动副处的碰撞接触力。然后, 将相关参数结合到弹性动力学模型中, 建立含运动副间隙的 6-RSS 并联机器人弹性动力学模型。最后, 分析不同状态下支链弹性变形和运动副间隙各自产生误差的原因以及两者综合产生误差的原因。结果表明: 改进后的动力学建模方法充分考虑了支链弹性变形和运动副间隙的耦合性与瞬时性, 较其他动力学建模方法更加精确。

关键词: 并联机器人; 运动副间隙; 广义碰撞力; 弹性动力学; 杆件虚长度

中图分类号: TP242; TH113

文献标识码: A

Elastic dynamics modeling and analysis for a 6-RSS parallel robot with joint clearance

WANG Linjun^{1,2}, XU Bo¹, ZHENG Min¹, ZHU Zongxiao¹, ZHANG Dong²

(1.School of Electrical and Mechanical Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China; 2.Western China Energy and Environment Research Center, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: In order to improve the accuracy of the dynamic model of the six-degree-of-freedom parallel robot in space, taking the 6-RSS parallel robot (R: rotating joint, S: spherical joint) as the research object, a dynamic modeling method combining the elastic deformation of the branch chain and the random change of the joint clearance is proposed. Firstly, according to the geometric structure and initial state of the parallel robot, the kinematics analysis was carried out under ideal conditions. The mathematical statistics principle and symbolic function were used to establish the kinematic model of the revolute joint with clearance and spherical joint with clearance. And then the bar virtual length and the collision contact force at each joint were calculated. Secondly, combining the bar virtual length, the collision contact force and the elastic dynamics model, the elastic

收稿日期: 2021-10-19; 修订日期: 2021-11-19. Received 19 Oct. 2021; accepted 19 Nov. 2021.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (51806093); 甘肃省自然科学基金资助项目 (18JR3RA141)

Foundation items: Project Supported by the National Natural Science Foundation, China (No.51806093), and the Natural Science Foundation of Gansu Province, China (No.18JR3RA141).

dynamics model of the 6-RSS parallel robot with joint clearance was established. Finally, the reasons for the errors of the elastic deformation of the branch chain and the joint clearance under different conditions and the reasons for the combined errors of the two were analyzed. The results show that the improved dynamic modeling method fully considers the coupling and instantaneity of the elastic deformation of the branch chain and the joint clearance, and is more accurate than other dynamic modeling methods.

Keywords: parallel robot; joint clearance; generalized collision force; elastic dynamics; bar virtual length

0 引言

运动副是并联机器人的重要组成部分。通常,在并联机器人的动态分析中,假设它们是理想的。然而,由于加工误差、装配误差、载荷变形等诸多不确定因素的影响,实际运动副中磨损、变形以及铰链间隙^[1,2]是不可避免的。间隙的存在会引起一些意想不到的动态响应,甚至影响系统的动态性能和可靠性。因此,有必要开展含运动副间隙的并联机器人动力学研究。

为了减小间隙模型的计算量,许多研究人员基于经典的曲柄滑块机构建立机械系统的间隙模型^[3,4]。Chen 等^[5]结合多体动力学理论和非线性接触理论,提出了带间隙曲柄滑块机构动力学分析的计算方法。虽然这些研究建立了转动副的间隙模型,但由于研究中一般仅考虑了转动副的间隙忽略了其他运动副的间隙,具有较大的局限性。因此,一些学者在单个转动副间隙模型的基础上通过约束关系建立了多运动副间隙模型^[6-9],提高了机械系统的精度。并且随着运动副间隙研究的深入,许多学者突破了维度与运动副类型的限制,建立了不同运动副的空间间隙模型^[10-12],进而优化系统的间隙模型。陈修龙等^[13]基于 4-UPS-RPU 并联机构开展含球面副间隙的动力学研究,分析球面副间隙对加速度与碰撞力的影响。朱景原等^[14]借助 Flores 接触力模型与 Coulomb 摩擦模型研究了关节间隙对并联机构动态特性的影响。Jiang 等^[15]以含间隙运动副的最小接触力为目标函数,利用遗传算法对多连杆机构的多目标优化设计进行了研究。孔骏成等^[16]基于 2-RPaRSS 并联机构,开展了不同种类运动副的间隙误差补偿研究。

基于以上认识可知,目前并联机器人的动力学建模方法主要集中在刚体动力学,对于综合分析运动副间隙随机变化与支链弹性变形的动力学研究依然匮乏。因此,本文利用数理统计原理与符号函数模拟实际运动副的间隙变化和局部作用力,建立各个运动副的间隙模型。最后,通过杆件虚长度将运动副间隙模型结合到系统弹性动力学模型中,建立了考虑运动副间隙的 6-RSS 并联机器人弹性动力学模型。通过分析运动副间隙与支链弹性变形引起的误差,可知改进后的动力学建模方法有效的提高了并联机器人动力学模型的精度。

1 运动学建模与分析

1.1 理想条件下的运动学建模

图 1 为 6-RSS 并联机器人的简图，系统中各个支链结构相同分别通过转动副 A_i 、球面副 B_i 与静平台和动平台相连，并且各个支链中驱动臂与从动臂通过球面副 C_i 相连。

在静平台 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 上建立静坐标系 $O-XYZ$ ，动平台 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ 上建立动坐标系 o_p-xyz 。驱动臂 A_iC_i 的分布角为 θ_i ， θ_i 是 OA_i 与 X 轴正方向之间的夹角； α_i 为驱动臂的输入角度； β_i 为动平台上球面副的分布角， β_i 为 o_pB_i 与 x 轴的夹角；驱动臂的长度为 L_{ac} ，从动臂的长度为 L_{cb} 。转动副的分布圆半径为 R_1 ，动平台 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ 上球面副的分布圆半径为 R_2 。

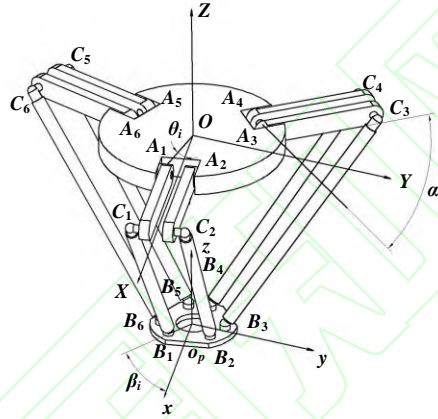


图 1 6-RSS 并联机器人简图

基于该并联机器人的结构特征，动坐标系 o_p-xyz 在静坐标系 $O-XYZ$ 中的位置可以用 o_p 表示，

$o_p = [x_p \quad y_p \quad z_p]^T$ 。动坐标系 o_p-xyz 相对于静坐标系 $O-XYZ$ 的姿态变换矩阵可表示为：

$$R = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -c\alpha s\beta + s\alpha s\beta c\gamma & s\alpha s\gamma + c\alpha s\beta c\gamma \\ c\beta s\gamma & c\alpha c\gamma + s\alpha s\beta s\gamma & -c\gamma s\alpha + c\alpha s\beta s\gamma \\ -s\beta & s\alpha c\beta & c\alpha c\beta \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中： s 、 c 是 \sin 、 \cos 函数的简化表示。

旋转关节 A_i 在静坐标系 $O-XYZ$ 中的坐标可以用 a_i 表示， $a_i = R_1[\cos \theta_i \quad \sin \theta_i \quad 0]^T$ 。因此，

球面副 C_i 在静坐标系 $O-XYZ$ 中的位置矢量可以表示为：

$$c_i = k_i m_i + a_i \quad (2)$$

式中： $m_i = L_{ac}[\cos \alpha_i \quad 0 \quad \sin \alpha_i]^T$ ； u_i 表示运动副的安装角； k_i 表示支链安装矩阵，

$$k_i = \begin{bmatrix} \cos u_i & -\sin u_i & 0 \\ \sin u_i & \cos u_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\circ}$$

球面副 B_i 在静坐标系 $O-XYZ$ 中的位置矢量可以表示为:

$$b_i = Rn_i^* + o_p \quad (3)$$

式中: n_i^* 表示 B_i 点在动坐标系 o_p-xyz 下的位置矢量, $n_i^* = R_2[\cos \beta_i \quad \sin \beta_i \quad 0]^T$ 。

基于闭环矢量法 6-RSS 并联机器人的运动学方程可以表示为:

$$L_{cb}^2 = (c_i - b_i)^T (c_i - b_i) \quad (i=1,2,\dots,6) \quad (4)$$

基于上述运动学模型可知, 在理想条件下 6-RSS 并联机器人通过控制 6 个转动副驱动完成生产任务。运动副与支链的变化会对并联机器人的性能产生重要影响。

1.2 含间隙的运动副结构描述

在 6-RSS 并联机器人中存在转动副和球面副两种类型的运动副。虽然同时分析各个运动副处的间隙更好的体现了运动副间隙对该并联机器人动态特性的影响, 但也加大了系统间隙模型的复杂程度。因此, 为了减小系统运动学与动力学分析的计算量需要对系统中的运动副间隙模型进行适当的简化:

- (1) 不考虑转动副中轴倾斜时与轴套间的点接触状况。
- (2) 在分析球面副间隙时只考虑因间隙产生的径向误差。
- (3) 定义转动副处的间隙矢量服从正态分布, 球面副处的间隙矢量服从均匀分布。
- (4) 定义运动副处的误差为微小误差, 不影响并联机器人的正常运动。

2 含运动副间隙的并联机器人运动学模型

6-RSS 并联机器人由多条支链通过运动副连接而成, 并且在实际加工和装配过程中存在误差, 这些因素必然会导致运动副处产生间隙。因此为了提高系统的精度, 基于数理统计原理与符号函数模拟并联机器人运行过程中运动副间隙的变化。

2.1 运动副坐标系

如图 2 所示, 为了描述转动副间隙与系统运动状态间的关系, 建立转动副坐标系 $C-x_c y_c z_c$ 。其中 x_c 轴方向沿着驱动臂轴线指向球面副 C_i 方向, z_c 轴方向与转动副的轴线方向保持一直, y_c 轴方

向通过右手定则判断。 r_a 与 R_a 分别为轴和轴套的半径， C' 、 C 表示轴与轴套的几何中心； C_a 表示轴套端面中心点； θ_{d1} 表示轴与轴套中心点连线与 x_c 轴的夹角。 e_r 、 e_a 分别表示轴与轴套相互碰撞时，径向和轴向的间隙矢量。

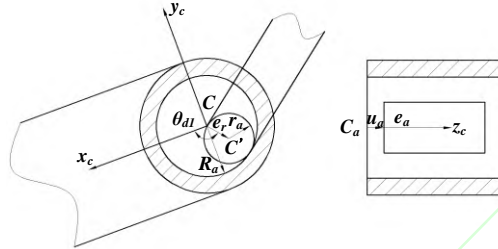


图2 转动副坐标示意图

理想状态下球面副有3个转动自由度，当其存在间隙时球体与球套中心不再重合，球体可以在球套内自由运动，自由度的个数变为6。如图3所示，含间隙的球面副中 s 是球套的几何中心， e 为球体的几何中心。 R_s 为球套的半径， R_e 为球体的半径。设接触面的间隙矢量 e_s 与 z 轴的夹角为 η_{d1} ， e_s 在 xsy 面的投影与 x 轴的夹角为 η_{d2} 。

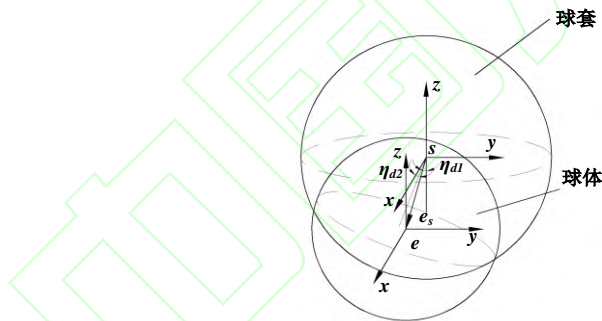


图3 球面副坐标示意图

2.2 转动副径向间隙

根据图2可知转动副的径向间隙矢量为 e_r ，但在6-RSS并联机器人运行过程中 e_r 会发生随机变化。因此，为了反映并联机器人运动过程中转动副间隙矢量的变化规律，定义径向间隙矢量 e_r 的概率密度函数 $f_r(x_c, y_c)$ 形式如下所示：

$$f_r(x_c, y_c) = \begin{cases} K_r e^{-\frac{(\sqrt{x_c^2 + y_c^2} - \mu)^2}{2\sigma^2}} & 0 \leq x_c^2 + y_c^2 \leq \delta_r^2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (5)$$

式中: x_c, y_c 为转动副间隙坐标, mm; $\delta_r = R_a - r_a$ 为轴与轴套最大径向间隙, mm; $K_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta$;

μ, σ 为正态分布参数。

由式(5)可知轴与轴套间任意时刻的径向间隙矢量 e_r 。结合轴与轴套间的最大径向间隙 δ_r 可得碰撞接触时的径向变形量为 $r_\delta = e_r - \delta_r$ 。

$$r_\delta = \begin{cases} r_\delta < 0 & \text{轴与轴套未接触, 自由运行} \\ r_\delta = 0 & \text{轴与轴套开始接触或开始分离} \\ r_\delta > 0 & \text{轴与轴套发生碰撞} \end{cases} \quad (6)$$

2.3 转动副轴向间隙

为便于建立系统整体的关节间隙模型, 仅考虑轴与轴套平行时沿轴线方向的间隙。轴向间隙矢量 e_a 的概率密度函数 $f_a(z_c)$ 形式如下:

$$f_a(z_c) = \begin{cases} K_a e^{-\frac{(z_c - \mu)^2}{2\sigma^2}} & 0 \leq z_c^2 \leq \delta_a^2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (7)$$

式中: z_c 为转动副间隙坐标, mm; δ_a 表示轴与轴套间的最大轴向间隙, mm; $K_a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta$ 。

由式(7)可知轴与轴套间任意时刻的轴向间隙矢量 e_a 。结合轴与轴套间的最大轴向间隙 δ_a 可得碰撞接触时的轴向变形量为 $a_\delta = e_a - \delta_a$ 。

$$a_\delta = \begin{cases} a_\delta < 0 & \text{轴与轴套未接触, 自由运行} \\ a_\delta = 0 & \text{轴与轴套开始接触或开始分离} \\ a_\delta > 0 & \text{轴与轴套发生碰撞} \end{cases} \quad (8)$$

2.4 球面副径向间隙

为了模拟运动副间隙的随机性引入随机函数 $rand(1)$, 同时设球面副径向间隙矢量 e_s 服从以 η_{d1} 和 η_{d2} 为参数的二维均匀分布。

$$f(\eta_{d1}, \eta_{d2}) = \begin{cases} \frac{k_s}{2\pi^2} & 0 \leq \eta_{d1} \leq \pi, 0 \leq \eta_{d2} \leq 2\pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (9)$$

式中： k_s 为球面副间隙动态修正系数， $k_s = rand(1)$ ； $\eta_{d1} = \pi rand(1)$ ； $\eta_{d2} = 2\pi rand(1)$ 。

球面副的最大间隙 $\delta_s = R_s - R_e$ ， mm。由(9)式可以获得任意时刻的球面副间隙矢量 e_s ， 因此球体与球套接触时的变形量为 $s_\delta = e_s - \delta_s$ 。

$$s_\delta = \begin{cases} s_\delta < 0 & \text{轴与轴套未接触， 自由运行} \\ s_\delta = 0 & \text{轴与轴套开始接触或开始分离} \\ s_\delta > 0 & \text{轴与轴套发生碰撞} \end{cases} \quad (10)$$

3 含运动副间隙的支链运动学模型

如图 4 所示， 静平台与驱动臂通过转动副相连， 通过分析可知转动副的径向运动被限制在半径为 e_r 的圆形区域内， 图中虚线为驱动臂上任意一点 N^* 点的理想运动轨迹， 在转动副坐标系下， 该点的实时坐标为：

$$\begin{cases} x_{N^*} = e_r \cos(\theta_{d1}) + l_{ac} \cos(\theta_{d2}) \\ y_{N^*} = e_r \sin(\theta_{d1}) + l_{ac} \sin(\theta_{d2}) \end{cases} \quad (11)$$

式中： l_{ac} 为轴中心到 N^* 的距离； $\theta_{d1} = 2\pi rand(1)$ ； θ_{d2} 为驱动杆在系统坐标系下的相对转动角度。

同理， N^* 点的轴向坐标为：

$$z_{N^*} = z_r + e_a \quad (12)$$

式中： z_r 为考虑运动副间隙时点 N^* 在运动副坐标系中的坐标值。

由式(11)、(12)可以得到考虑转动副间隙时驱动臂上任意一点在转动副坐标系中的坐标为

$$C_{N^*} = [x_{N^*} \quad y_{N^*} \quad z_{N^*}]^T。$$

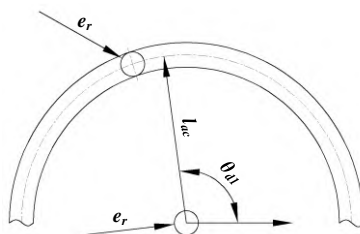


图 4 转动副径向间隙跳动区域

从动臂两端通过球面副与驱动臂和动平台相连， 如图 5 所示球面副的运动被限制在半径为 e_s 的球体区域内。球体质心 e 在球面副坐标系中的实时坐标可以表示为：

$$\begin{cases} x_e = e_s \sin(\eta_{d1}) \cos(\eta_{d2}) \\ y_e = e_s \sin(\eta_{d1}) \sin(\eta_{d2}) \\ z_e = e_s \cos(\eta_{d1}) \end{cases} \quad (13)$$

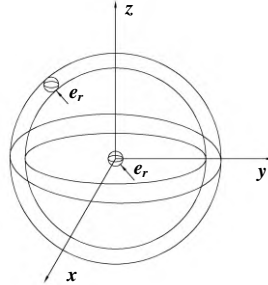


图 5 球面副间隙跳动区域

4 含间隙的运动副碰撞接触模型

基于上述分析可知在 6-RSS 并联机器人中存在转动副与球面副，因此需要分别建立转动副与球面副的接触力模型。并且由于间隙较小，仅考虑各个运动副在运动过程中产生的碰撞力与摩擦力。

4.1 含间隙的转动副碰撞接触模型

当转动副存在间隙时，间隙的大小和方向会随时间不断变化，最终导致转动副处的轴与轴套不断发生碰撞接触。其碰撞接触模型如图 6 所示。

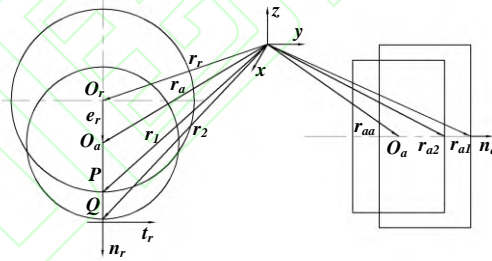


图 6 转动副碰撞接触模型

轴与轴套发生碰撞时的接触点在图 6 中分别表示为 Q 、 P ，系统坐标系下两点的位移矢量分别表示为 r_1 、 r_2 。

$$\begin{cases} r_1 = r_r + n_r R_a \\ r_2 = r_a + n_r r_a \end{cases} \quad (14)$$

式中： n_r 表示沿 PQ 方向的法向矢量。

将式(14)对时间求导，可得轴与轴套径向碰撞接触时的法向与切向速度矢量分别为：

$$\begin{cases} v_{nr} = [(\dot{r}_1 - \dot{r}_2)^T n_r] n_r \\ v_{\sigma} = (\dot{r}_1 - \dot{r}_2)^T - v_{nr} \end{cases} \quad (15)$$

同理可得轴线方向上轴与轴套间的相对接触速度为：

$$\begin{cases} v_{na} = [(\dot{r}_{a1} - \dot{r}_{a2})^T n_a] n_a \\ v_{\tau a} = (\dot{r}_{a1} - \dot{r}_{a2})^T - v_{na} \end{cases} \quad (16)$$

在 6-RSS 并联机器人的运行过程中由于运动副处存在间隙，可能导致轴与轴套或球体与球套间发生碰撞引起系统不良振动，对系统的性能造成不利的影晌。因此，在分析时不能忽略由于运动副间隙产生的能量损失，宜采用高恢复系数、能量碰撞损失少的 Lankarani-Nikravesh 碰撞力模型，更加接近实际情况。

$$F_N = K_N \delta^n \left[1 + \frac{3(1-\xi^2)}{4} \frac{\dot{\delta}_c}{\dot{\delta}_{c1}} \right] \quad (17)$$

$$K_N = \frac{4E_{in}E_{out}}{3[E_{in} + E_{out} - (E_{out}u_{in}^2 + E_{in}u_{out}^2)]} \sqrt{\frac{R_{in}R_{out}}{R_{in} - R_{out}}}$$

式中：\$F_N\$ 为接触力，N；\$\delta\$ 为接触变形量，mm；\$\dot{\delta}_c\$ 为相对接触速度，mm/s；\$\dot{\delta}_{c1}\$ 为初始接触速度，mm/s；\$n\$ 为接触非线性指数，对于金属表面设定为 1.5；\$\xi\$ 为恢复系数，设定为 0.9；\$u_{in}\$、\$u_{out}\$ 分别为轴与轴套的泊松比；\$E_{in}\$、\$E_{out}\$ 分别表示轴与轴套的弹性模量，N/mm²；\$R_{in}\$、\$R_{out}\$ 分别表示轴与轴套的接触半径，mm；\$K_N\$ 为接触刚度系数；定义 \$\rho_c\$ 表示轴与轴套材料的密度，kg/m³，初始碰撞速度 \$\dot{\delta}_{c1} \leq 10^{-5} \sqrt{\frac{E}{\rho_c}}\$。

为了描述转动副间隙碰撞过程中产生的摩擦力和速度相对较低时出现的粘滞现象，采用修正的 Coulomb 摩擦模型。

$$F_t = -\mu_d c_d F_N v_t \quad (18)$$

$$c_d = \begin{cases} 0 & v_t < v_0 \\ \frac{v_t - v_0}{v_1 - v_0} & v_0 \leq v_t \leq v_1 \\ 1 & v_t > v_1 \end{cases}$$

式中：\$\mu_d\$ 为滑动摩擦因数；\$c_d\$ 为动态修正系数；\$v_t\$ 为切向速度；\$v_0\$、\$v_1\$ 为给定速度界限。

因此运动副的碰撞力矢量可表示为：

$$F_{cc} = F_N + F_t \quad (19)$$

4.2 含间隙的球面副碰撞接触模型

球面副的碰撞接触模型如 7 所示。在图中 m 、 n 为球体与球套接触时的碰撞点，其在系统坐标系下的位置矢量分别为 r_m 、 r_n 。

$$\begin{cases} r_m = r_e + n_s R_e \\ r_n = r_s + n_s R_s \end{cases} \quad (20)$$

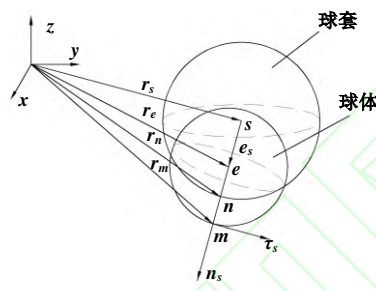


图 7 球面副碰撞接触模型

将式(20)两端对时间求导，可得球体与球套碰撞接触时的法向与切向速度矢量分别为：

$$\begin{cases} v_{ns} = [(\dot{r}_m - \dot{r}_n)^T n_s] n_s \\ v_{ts} = [(\dot{r}_m - \dot{r}_n)^T - v_{ns}] \end{cases} \quad (21)$$

由于球面副可以等效转化为三个相互正交的转动副，因此选择球面副的碰撞接触力模型与转动副的碰撞接触力模型相同。

5 含运动副间隙的弹性动力学模型

5.1 单元坐标系中支链弹性动力学模型

在 6-RSS 并联机器人的运行过程中，转动副、静平台以及动平台使用刚度较大的材料制成，而主动臂与从动臂由于使用了轻质材料容易产生振动进而导致变形。因此，在开展 6-RSS 并联机器人的弹性动力学建模时，不考虑转动副、静平台和动平台的变形。并且为了方便建立系统的数学模型，将系统拆分为驱动臂弹性子系统、从动臂弹性子系统以及动平台刚性子系统。根据图 1 中 6-RSS 并联机器人构件的形状，选择矩形定截面空间柔性梁单元作为驱动臂 $A_i C_i$ 的梁单元模型，选择环形定截面空间柔性梁单元作为从动臂 $C_i B_i$ 的梁单元模型。将驱动臂 $A_i C_i$ 视为空间悬臂梁，则节点 A_i 处的弹性位移与转角均为 0。节点 B_i 、 C_i 处为球面副，这里将球面副等效为三个相互正交的转动副，

则节点 B_i , C_i 处的曲率为 0。因此驱动臂 A_iC_i 的广义坐标为 9 个, 从动臂 C_iB_i 的广义坐标为 12 个。

驱动臂与从动臂的空间梁单元有限元模型见图 8。



(a) 驱动臂矩形定截面空间柔性梁单元 (b) 从动臂环形定截面空间柔性梁单元

图 8 驱动、从动臂空间梁单元有限元模型

经分析可以分别得到驱动臂与从动臂的弹性动力学方程为:

$$M_e^{i1} \ddot{\delta}^{i1} + K_e^{i1} \delta^{i1} = F_e^{i1} \quad (22)$$

$$M_e^{i2} \ddot{\delta}^{i2} + K_e^{i2} \delta^{i2} = F_e^{i2} \quad (23)$$

式中: $i1$ 、 $i2$ 分别为第 i 条支链的驱动臂与从动臂。 δ^{i1} 、 δ^{i2} 分别为驱动臂与从动臂的单元广义坐标。 $M_e^{i1} \in R^{9 \times 9}$, $K_e^{i1} \in R^{9 \times 9}$, $F_e^{i1} \in R^{9 \times 1}$; $M_e^{i2} \in R^{12 \times 12}$, $K_e^{i2} \in R^{12 \times 12}$, $F_e^{i2} \in R^{12 \times 1}$ 。

将式(22)与(23)通过运动副约束条件组合可得支链的弹性动力学方程为:

$$M_e^i \ddot{\delta}^i + K_e^i \delta^i = F_e^i \quad (24)$$

式中: $\delta^i = [\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{i21}]^T \in R^{21 \times 1}$; $M_e^i \in R^{21 \times 21}$; $K_e^i \in R^{21 \times 21}$; $F_e^i \in R^{21 \times 1}$ 。

5.2 系统坐标系中支链弹性动力学建模

由于 6-RSS 并联机器人的各个支链结构相同, 因此为便于分析以任意挑选一条支链 i 开展研究, 其在系统广义坐标下的模型如图 9 所示。

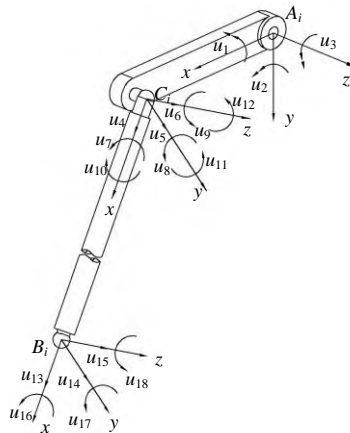


图 9 支链的系统广义坐标模型

设系统坐标系 $O-XYZ$ 到单元坐标系 A_i-xyz , C_i-xyz 的姿态变换矩阵分别为 R_{i1} , R_{i2} , 则单元坐标系与系统坐标系间的广义坐标、广义速度以及广义加速度转换关系为:

$$\begin{cases} \delta_i = B_i U_i \\ \dot{\delta}_i = \dot{B}_i U_i + B_i \dot{U}_i \\ \ddot{\delta}_i = \ddot{B}_i U_i + 2\dot{B}_i \dot{U}_i + B_i \ddot{U}_i \end{cases} \quad (25)$$

式中: $B_i \in R^{18 \times 18}$ 为支链 i 的单元广义坐标与系统广义坐标之间的姿态变换矩阵; $\delta_i \in R^{18 \times 1}$ 为支链的单元广义坐标; $U_i \in R^{18 \times 1}$ 为支链的系统广义坐标。

将式(25)代入(24)中即可得到系统坐标系下任意支链 i 的弹性动力学方程为:

$$M^i \ddot{U}_i + C_i^* \dot{U}_i + K^i U_i = F^i \quad (26)$$

式中: $M^i \in R^{18 \times 18}$, 为支链 i 的质量矩阵 $M^i = B_i^T M_e^i B_i$; $C_i^* \in R^{18 \times 18}$, 为支链 i 的阻尼矩阵 $C_i^* = 2B_i^T M_e^i \dot{B}_i$; $K^i \in R^{18 \times 18}$ 为支链 i 的刚度矩阵 $K^i = B_i^T M_e^i \ddot{B}_i + B_i^T K_e^i B_i$ 。

5.3 6-RSS 并联机器人弹性动力学建模

5.3.1 运动学与动力学约束

综合分析 6-RSS 并联机器人的运动特性, 设 $U_0 = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6]^T$ 为由各个支链弹性变形引起的动平台的弹性位移, $U_{Bi} = [x_{Bi}, y_{Bi}, z_{Bi}]^T$ 为支链 $A_i C_i B_i$ 中球面副中心点 B_i 处的弹性位移。则在系统坐标系下动平台的运动学约束可以表示为:

$$U_{Bi} = J_i U_0 \quad (27)$$

式中: J_i 为位移协调矩阵, $J_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{Bi} & -y_{Bi} \\ 0 & 1 & 0 & -z_{Bi} & 0 & x_{Bi} \\ 0 & 0 & 1 & y_{Bi} & -x_{Bi} & 0 \end{bmatrix}$ 。

基于 Newton-Euler 方程, 可得系统坐标系下动平台子系统的动力学约束方程为:

$$M_0 \ddot{U} = f_0 + F_0 - M_0 \ddot{U}_{0r} \quad (28)$$

式中: M_0 为动平台的质量矩阵; f_0 为支链作用于动平台的广义力列阵; F_0 为动平台所受外力的广义力列阵; \ddot{U}_{0r} 为动平台刚体加速度列阵。

5.3.2 系统弹性动力学模型

取系统广义坐标 U_i^* ，则由式(27)可得：

$$U_i = R_i U_i^* \quad (29)$$

式中： $U_i = [u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{i18}]^T$ ， $U_i^* = [u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{i12}, u_{i16}, u_{i17}, u_{i18}, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6]^T$ ； R_i 为坐标

系协调矩阵， $R_i = \begin{bmatrix} [I]_{12 \times 12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [J_i]_{3 \times 6} \\ 0 & [I]_{3 \times 3} & 0 \end{bmatrix}$ 。

将式(29)代入式(26)中，则任意支链 i 的弹性动力学方程可以表示为：

$$M_i \ddot{U}_i^* + C_i \dot{U}_i^* + K_i U_i^* = F_i \quad (30)$$

式中： $M_i = R_i^T M^i R_i$ ， $M_i \in R^{21 \times 21}$ ； $C_i = R_i^T C_i^* R_i$ ， $C_i \in R^{21 \times 21}$ ； $K_i = R_i^T K^i R_i$ ， $K_i \in R^{21 \times 21}$ ；

$F_i = R_i^T F^i$ ， $F_i \in R^{21 \times 1}$ 。

通过式(29)、(30)将动平台与各个支链的动力学方程装配到一起可得系统弹性动力学方程为：

$$M \ddot{U} + C^* \dot{U} + K U = F \quad (31)$$

式中： $M \in R^{96 \times 96}$ 为组成系统的 6 条支链全部柔性化时的总质量矩阵； $K \in R^{96 \times 96}$ 为系统总刚度矩阵， $C^* \in R^{96 \times 96}$ 为阻尼矩阵； $F \in R^{96 \times 1}$ 为系统所受的广义力列阵；

$U = [U_1^T, U_2^T, U_3^T, U_4^T, U_5^T, U_6^T, U_0^T]^T$ 。

通过瑞丽系数引入阻尼后系统的弹性动力学方程为：

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + K U = F \quad (32)$$

式中： C 表示系统的阻尼矩阵， $C = C^* + \lambda_1 M + \lambda_2 K$ 。

5.4 含运动副间隙的系统弹性动力学建模

由于运动副存在间隙，6-RSS 并联机器人各支链的杆件长度随着并联机器人的运动不断发生变化。为了方便分析，将由运动副间隙产生的杆件虚长度沿着支链各个杆件的轴线进行投影，得到主动臂与从动臂的实际长度。

基于上述分析可知 6-RSS 并联机器人的运动副中存在间隙会导致驱动臂与从动臂的长度发生变化。定义引起其杆长微小变化的那一部分长度为杆件虚长度 Δl 。

$$\Delta l = l_c - l \quad (33)$$

式中： l_c 表示考虑运动副间隙的实际杆长， l 表示不考虑间隙时的杆件长度。

定义 M_l 为杆件的总质量矩阵，按照等质量原则将杆件的质量平均分配到加上虚长度的杆件上，则杆件的密度矩阵 $\rho_i(t) = \frac{M_l}{l_c A}$ 。

将式(19)、(33)和 $\rho_i(t)$ 代入式(32)中，可得包含运动副间隙的弹性动力学方程。

$$M_c \ddot{U}_c + C_c \dot{U}_c + K_c U_c = F_c \quad (34)$$

式中： M_c 、 C_c 和 K_c 分别为考虑运动副间隙时的系统总质量矩阵、总阻尼矩阵和总刚度矩阵。 \ddot{U}_c 、 \dot{U}_c 和 U_c 分别表示考虑运动副间隙时的弹性加速度、弹性速度和弹性位移； F_c 为包含间隙碰撞接触力的广义力列阵。

6 数值分析

为了分析支链弹性变形和运动副间隙随机变化分别对并联机器人性能的影响以及两者间的耦合性，基于相同的轨迹计算不同状态下动力学方程。

由于上述研究得到的动力学方程是一个系数复杂的微分方程，综合考虑各种方法的优缺点，本文采用满足一定条件时无条件稳定、误差小的 Newmark 法对(46)式进行求解。分析支链弹性变形对系统动态特性的影响。仿真轨迹如下所示：

$$\begin{cases} X = x_0 \\ Y = y_0 + 50\sin(2\pi t) \\ Z = z_0 + 80\sin(2\pi t) \\ n_1 = 20\sin(2\pi t) \\ n_2 = 20\sin(2\pi t) \\ n_3 = 0 \end{cases} \quad (35)$$

式中： x_0 、 y_0 和 z_0 为动平台的质心 o_p 在系统坐标系下的初始坐标值。

首先基于式(4)与式(35)开展运动学分析，为后续动力学计算提供必要的运动学参数。然后通过计算不同最大运动副间隙下系统的综合动力学方程式(34)，分析支链弹性变形与运动副间隙对并联机器人动态特性的影响。最后对比刚性条件下的位移、速度以及加速度轨迹与式(32)和式(34)数值计算得到的相应结果，分析支链弹性变形与运动副间隙对并联机器人动态特性的综合影响。

在表 1 中给出了 6-RSS 并联机器人各个子系统的转动惯量；表 2 中给出了并联机器人中各个运动副的最大间隙值；表 3 中给出了系统数值计算参数。

表 1 构件转动惯量

构件	$J_{xx}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	$J_{yy}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	$J_{zz}/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$
A_iC_i	0.10×10^{-3}	3.02×10^{-3}	3.02×10^{-3}
C_iB_i	4.58×10^{-3}	11.00×10^{-3}	11.00×10^{-3}
动平台	2.73×10^{-3}	2.73×10^{-3}	5.42×10^{-3}

表 2 6-RSS 并联机器人的最大运动副间隙

项目	转动副 A_i	球面副 C_i	球面副 B_i
径向间/mm	0.25、0.50	0.25、0.50	0.25、0.50
轴向间/mm	0.25、0.50	-	-

表 3 6-RSS 并联机器人计算参数

参数名称	值	参数名称	值
材料	铝合金	支链密度 $\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	2700
抗压弹性模量 E/GPa	70	剪切弹性模量 G/GPa	26.5
驱动臂 L_{ac}/mm	216	从动臂 L_{cb}/mm	500
弹性构件 A_iC_i 矩形截面尺寸宽/mm	40	弹性构件 A_iC_i 矩形截面尺寸高/mm	20
弹性构件 C_iB_i 的外径 D/mm	25	弹性构件 C_iB_i 的内径 d/mm	10
静平台外接圆半径 R_1/mm	145.27	动平台外接圆半径 R_2/mm	64
Rayleigh 阻尼系数 λ_1	2.0×10^{-3}	Rayleigh 阻尼系数 λ_2	3.0×10^{-4}
仿真时间 T/s	2	时间间隔 $\Delta t/\text{s}$	0.001
动平台的质量 m/kg	1.366	动平台质心初始坐标	(0.0,-387)

图 10 给出了 6-RSS 并联机器人弹性动力学模型的求解过程。

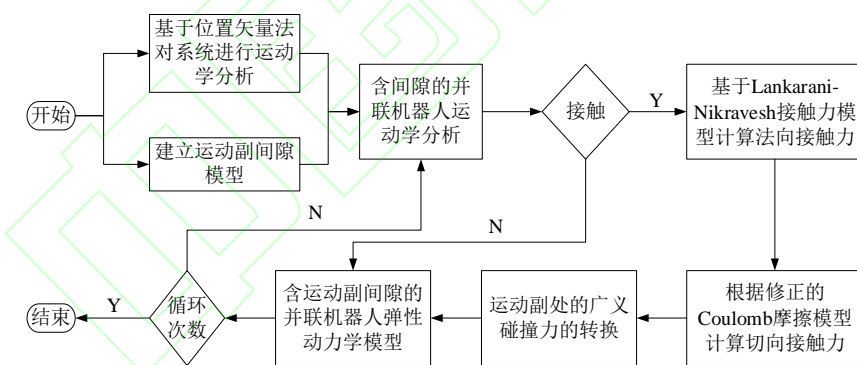


图 10 含运动副间隙的并联机器人数值分析过程

图 11、图 12 分别表示运动副最大间隙为 0.25mm 和 0.5mm 时的含间隙弹性位移、弹性位移以及理想的刚性位移间的对比。通过对比发现，仅考虑支链弹性变形时动平台质心处的线位移与角位移均在理想的刚性位移上下来回波动。并且由于各个支链间的耦合性，使得动平台沿 X 方向产生了弹性线位移误差、绕 Z 方向产生了弹性角位移误差。

对比图 11 和图 12 中含间隙的弹性曲线和弹性曲线可知，两类位移曲线大致趋势相同但不完全重合，并且在局部区域存在突变。位移曲线出现突变是因为在建立运动副间隙模型时采用了数理统

计原理和符号函数模拟实际运动中间隙的变化情况，使得运动副间隙矢量的大小在最大运动副间隙下随机变化，运动副间隙方向在转动范围内随机变化。最终导致动平台的输出运动特性曲线出现局部的突变。

对比图 11 和图 12 中含间隙的弹性位移曲线可知，当运动副间隙为 0.25mm 时，由于运动副间隙与支链弹性变形使得动平台沿 X、Y、Z 方向的线位移耦合误差最大值分别达到 0.0104mm、0.0129mm、0.0047mm。当运动副间隙为 0.5mm 时误差最大值分别为 0.0204mm、0.0172mm、0.0077mm。支链弹性变形与运动副间隙对于角位移的影响处于 10^{-5} 数量级在分析时可以忽略。随着运动副最大间隙的增加，并联机器人的位移误差也在不断增加。

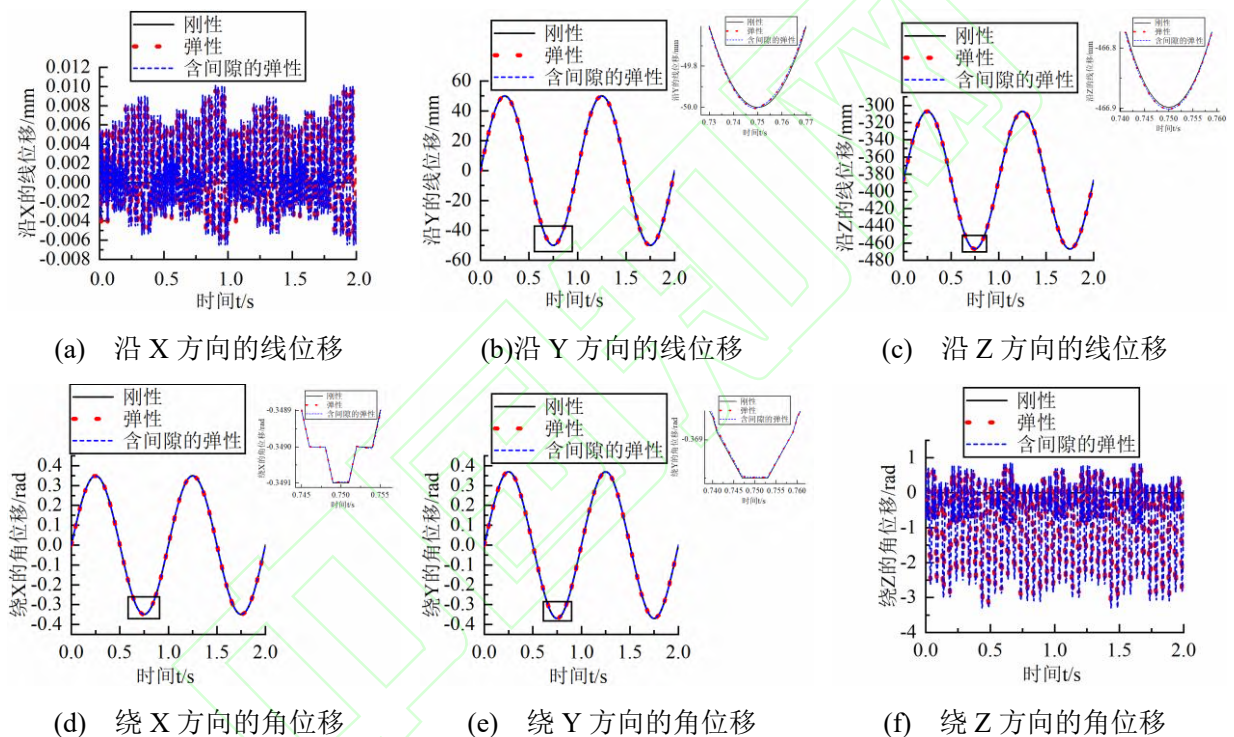
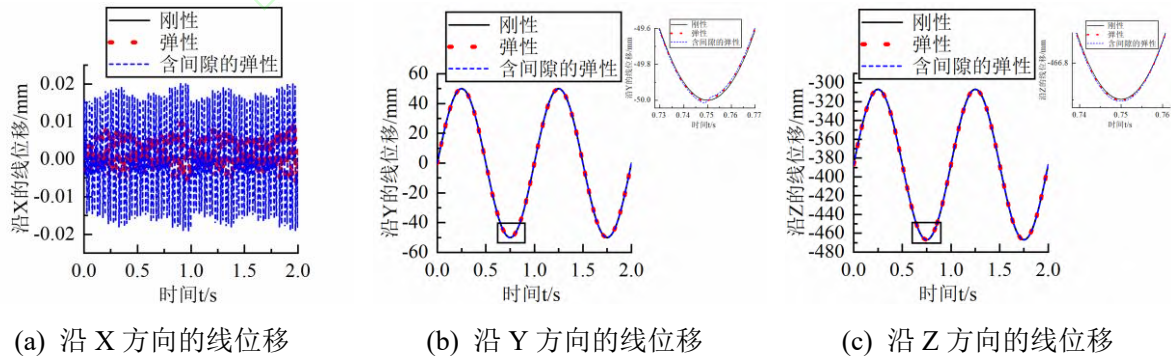
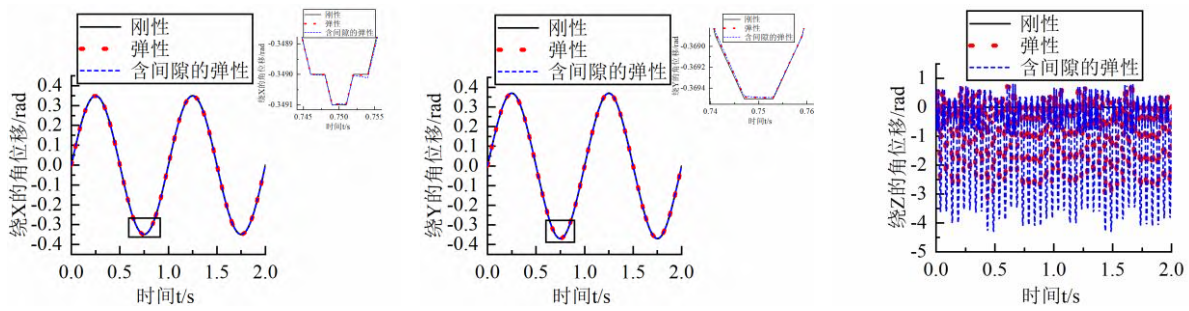


图 11 运动副间隙 $\delta_r=\delta_a=\delta_s=0.25\text{mm}$ 时动平台质心处的位移变化

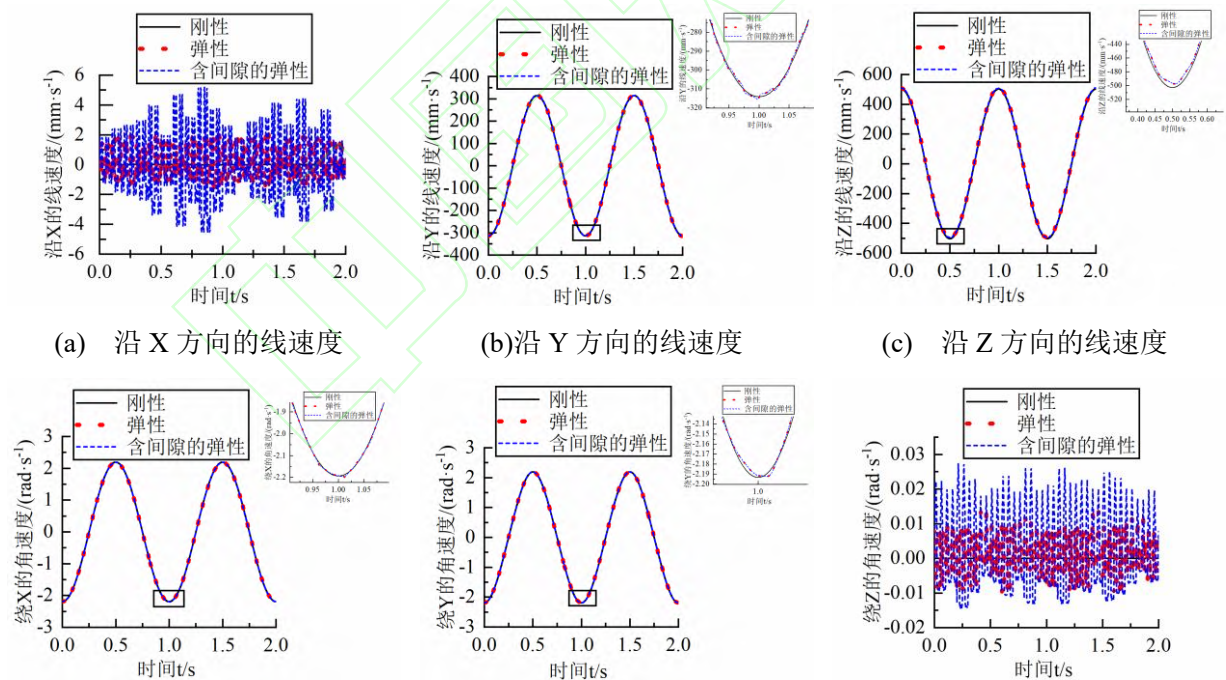




(d) 绕 X 方向的角位移 (e) 绕 Y 方向的角位移 (f) 绕 Z 方向的角位移

图 12 运动副间隙 $\delta_r=\delta_a=\delta_s=0.5\text{mm}$ 时动平台质心处的位移变化

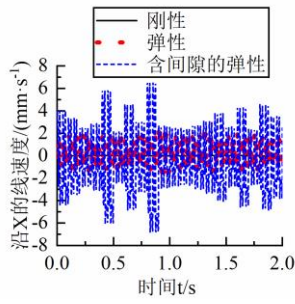
由图 13 和图 14 可知，在并联机器人运行过程中，速度误差相对于位移误差在数量级上至少扩大了 50 倍，动平台质心处的速度曲线有了明显的波动。运动副间隙为 0.25mm 时 X、Y、Z 方向的线速度误差均值达到 1.4934mm/s、1.0358mm/s、6.1585mm/s；角速度误差尽管相对角位移误差有了明显的波动但依然处于 10^{-3} 数量级在分析时可以忽略。当运动副间隙为 0.5mm 时的速度曲线相对于间隙为 0.25mm 时的速度曲线，幅值有了明显的增加。产生这些变化的主要原因是运动副间隙的随机变化引起系统中各运动副处不断发生高频冲击破坏了并联机器人的稳定性，最终导致速度曲线出现较为明显的误差。



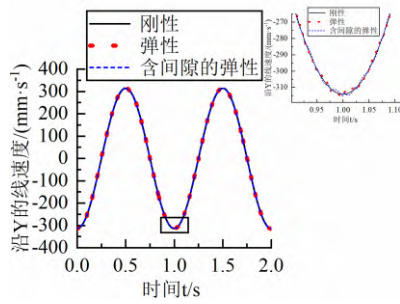
(a) 沿 X 方向的线速度 (b) 沿 Y 方向的线速度 (c) 沿 Z 方向的线速度

(d) 绕 X 方向的角速度 (e) 绕 Y 方向的角速度 (f) 绕 Z 方向的角速度

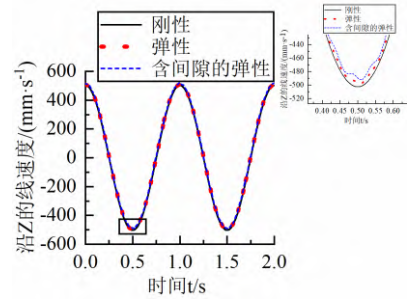
图 13 运动副间隙 $\delta_r=\delta_a=\delta_s=0.25\text{mm}$ 时动平台质心处的速度变化



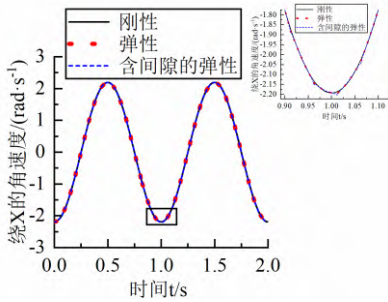
(a) 沿 X 方向的线速度



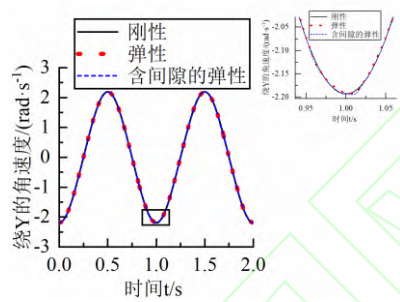
(b) 沿 Y 方向的线速度



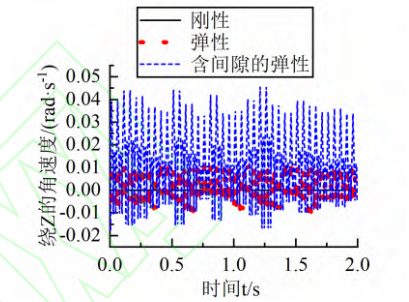
(c) 沿 Z 方向的线速度



(d) 绕 X 方向的角速度



(e) 绕 Y 方向的角速度

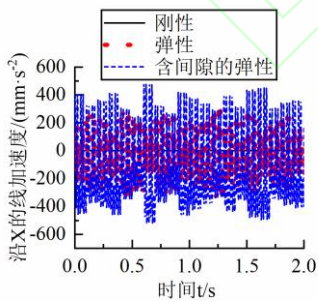


(f) 绕 Z 方向的角速度

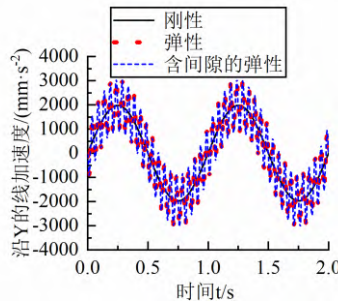
图 14 运动副间隙 $\delta_r=\delta_a=\delta_s=0.5\text{mm}$ 时动平台质心处的速度变化

由图 15 和图 16 可知，运动副最大间隙为 0.25mm 时并联机器人动平台在 X、Y、Z 方向的加速度误差最大值达到了 524.398mm/s^2 、 1087.200mm/s^2 、 2881.300mm/s^2 、 8.414rad/s^2 、 2.889rad/s^2 、 23.000rad/s^2 ，数据表明线加速度误差对于运动副间隙的变化比较敏感，角加速度误差尽管较小但不可忽略。并且随着运动副最大间隙的增加，加速度误差现大幅度的提升，局部突变更加明显。

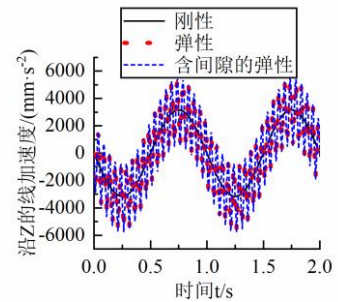
运动副间隙的随机变化导致运动副处产生了碰撞接触力，破坏了系统的精度与稳定性。同时运动副间隙处的碰撞接触力与支链的弹性振动相互耦合，加剧了支链的弹性振动，进一步增大了系统的误差。



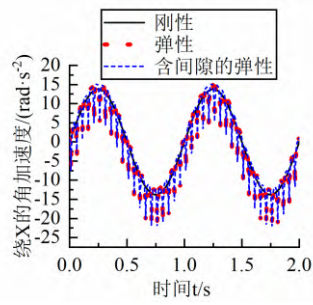
(a) 沿 X 方向的线加速度



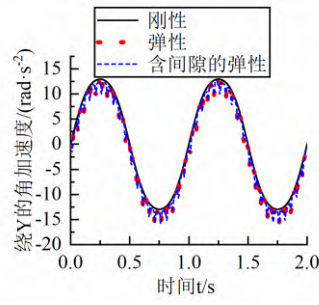
(b) 沿 Y 方向的线加速度



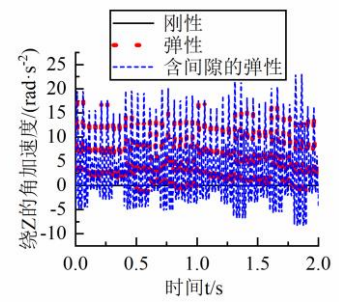
(c) 沿 Z 方向的线加速度



(d)绕 X 方向的角加速度

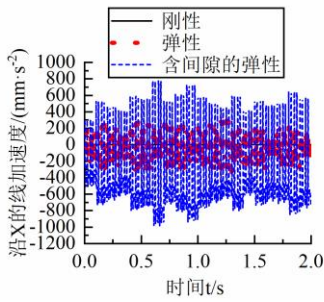


(e)绕 Y 方向的角加速度

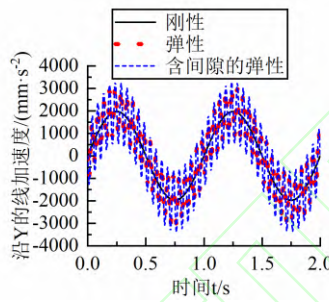


(f) 绕 Z 方向的角加速度

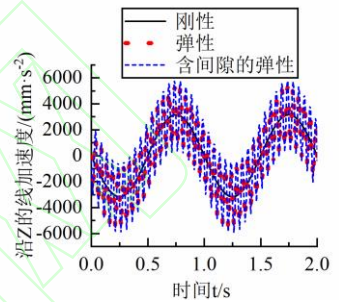
图 15 运动副间隙 $\delta_r=\delta_a=\delta_s=0.25\text{mm}$ 时动平台质心处的加速度变化



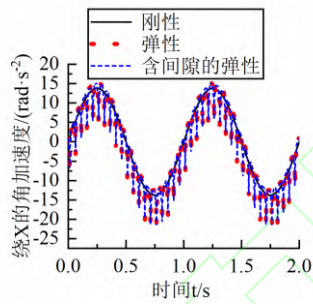
(a)沿 X 方向的线加速度



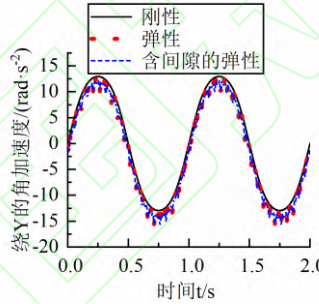
(b) 沿 Y 方向的线加速度



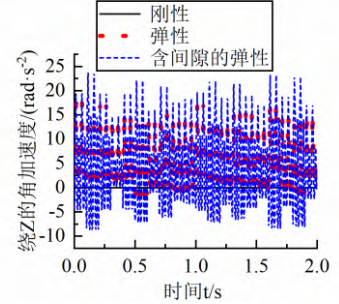
(c)沿 Z 方向的线加速度



(d)绕 X 方向的角加速度



(e)绕 Y 方向的角加速度



(f) 绕 Z 方向的角加速度

图 16 运动副间隙 $\delta_r=\delta_a=\delta_s=0.5\text{mm}$ 时动平台质心处的加速度变化

7 结束语

(1) 本文基于空间单元梁模型，运用有限元理论与 Lagrange 方程开展 6-RSS 并联机器人的弹性动力学建模。建模时不仅考虑了瞬时的弹性线位移误差还考虑了瞬时的弹性角位移误差对系统的影响，提高了弹性动力学模型的精度。因为运动副间隙的变化具有随机性，为了还原真实的运动情况采用数理统计原理与符号函数克服这一缺陷。最后将各个运动副的间隙模型、Lankarani-Nikravesh 接触力模型以及修正的 Coulomb 摩擦力模型结合到系统的弹性动力学模型中，建立了含运动副间隙的弹性动力学模型。通过改进得到的动力学模型更加真实地描述了系统的动力学特性，为提高并联机构的控制精度研究提供理论支持。

(2) 在 6-RSS 并联机器人运行过程中由于运动副间隙的存在，使得运动副处产生碰撞接触力，严

重破坏了系统的稳定性，加剧了系统构件的磨损。导致并联机器人动平台的运动输出特性产生较大的误差。并且随着运动副间隙的增加局部碰撞更加剧烈，由此产生的局部作用力更加明显。进而加剧了支链的弹性变形。同时支链的弹性形变会导致运动副间隙矢量随机变化。两者相互影响降低了系统的精度与稳定性。因此在建立并联机器人动力学模型时有必要考虑支链弹性变形与运动副间隙的影响。

参考文献:

- [1] BAI Zhengfeng, JIANG Xin, LI Jiyu, et al. Dynamic analysis of mechanical system considering radial and axial clearances in 3D revolute clearance joints[J]. Journal of vibration and control. 2020, 27(16): 1893-1909.
- [2] CHEN Gang, YUAN Jing. Nonlinear dynamics analysis of shift manipulator for robot driver considering multiple revolute clearance joints and variable load[J]. Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2021, 49(4): 596-614.
- [3] WU Xuze, SUN Yu, WANG Yu, et al. Correlation dimension and bifurcation analysis for the planar slider-crank mechanism with multiple clearance joints[J]. Multibody System Dynamics. 2021, 52(1): 95-116.
- [4] WANG Xupeng, LIU Geng, MA Shangjun, et al. Study on dynamic responses of planar multibody systems with dry revolute clearance joint: Numerical and experimental approaches[J]. Journal of sound and vibration. 2019, 438: 116-138.
- [5] CHEN Yu, FENG Jun, HE Qiang, et al. A methodology for dynamic behavior analysis of the slider-crank mechanism considering clearance joint[J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. 2021, 22(3): 373-390.
- [6] WANG Xupeng, LIN Wenzhou, JI Xiaomin, et al. Dynamic analysis of a planar multibody system with multiple revolute clearance joints[J]. Journal of mechanical engineering science. 2019, 233(10): 3429-3443.
- [7] XU Xusong, LIU Meng, SUN Zhiying. Assembly deviation interval analysis of spatial RSSR mechanism[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems. 2021, 27(7): 1959-1973 (in Chinese) . [徐旭松, 刘梦, 孙志英. 空间RSSR机构的装配偏差区间分析[J]. 计算机集成制造系统. 2021, 27(7): 1959-1973.]
- [8] ZHENG Kunming, HU Youmin, YU Wenyong. A novel parallel recursive dynamics modeling method for robot with flexible bar-groups[J]. Applied Mathematical Modelling. 2020, 77: 267-288.
- [9] WAN Qi, LIU Geng, SONG Chunyu, et al. Study on the dynamic interaction of multiple clearance joints for flap actuation system with a modified contact force model[J]. Journal of Mechanical Science and Technology. 2020, 34(7): 2701-2713.
- [10] SUN Jing, HAN Xuemei, WEI Yunhao, et al. Nonlinear Modal Analysis of Parallel Pointing Mechanisms Considering Time-varying Clearances[J]. China Mechanical Engineering. 2021, 32(14): 1700-1708 (in Chinese) . [孙静, 韩雪艳, 魏元浩, 等. 考虑时变间隙的并联指向机构非线性模态分析[J]. 中国机械工程. 2021, 32(14): 1700-1708.]
- [11] WANG Jian, DONG Hu, WANG Zhaodong, et al. Elastic dynamic modeling and analysis for a 3-CPaRR decoupled parallel mechanism with joint clearance[J]. Journal of Vibration and Shock.

- 2020, 39(5): 118-130 (in Chinese) . [王见, 董虎, 王兆东, 等. 含关节间隙的3-CPaRR解耦并联机构弹性动力学建模与分析[J]. 振动与冲击. 2020, 39(5): 118-130.]
- [12] CHEN Xiulong, GUO Jingyao. Effects of Spherical Clearance Joint on Dynamics of Redundant Driving Spatial Parallel Mechanism[J]. Robotica. 2021, 39(6): 1064-1080.
- [13] CHEN Xiulong, GAO Wenhua, SONG Hao, et al. Dynamic characteristic analysis of spatial parallel mechanism with spherical clearance[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems. 2018, 24(3): 660-670 (in Chinese) . [陈修龙, 高文花, 宋浩, 等. 含球面副间隙的空间并联机构动力学特性分析[J]. 计算机集成制造系统. 2018, 24(3): 660-670.]
- [14] ZHU Jingyuan, WANG Jian, DING Zehua, et al. Kinematics and dynamics analysis of a 3-CPaRR parallel mechanism with joint clearance[J]. Journal of Vibration and Shock. 2018, 37(18): 9-17 (in Chinese) . [朱景原, 王见, 丁泽华, 等. 含关节间隙的3-CPaRR并联机构的运动学和动力学分析[J]. 振动与冲击. 2018, 37(18): 9-17.]
- [15] JIANG Shuai, CHEN Xiulong. Reducing undesirable effects of clearances on dynamic and wear of planar multi-link mechanism[J]. Nonlinear dynamics. 2020, 100(2): 1173-1201.
- [16] KONG Juncheng, LI Ju, SHEN Huiping. Error Analysis and Compensation for Clearances among Kinematic Pairs of 2-RPaRSS Parallel Manipulators[J]. China Mechanical Engineering. 2020, 31(6): 706-713 (in Chinese) . [孔骏成, 李菊, 沈惠平. 2-RPaRSS并联操作手运动副间隙误差分析及补偿[J]. 中国机械工程. 2020, 31(6): 706-713.]

作者简介:

王林军(1963-), 男, 陕西宝鸡人, 教授, 硕士生导师, 研究方向: 机器人动力学与控制, E-mail: wanglinjun@lut.cn;

徐博(1997-), 男, 满族, 陕西西安人, 硕士研究生, 研究方向: 机器人动力学仿真与控制, E-mail: 3028695241@qq.com;

郑敏(1975-), 女, 贵州贵阳人, 博士, 副教授、硕士生导师, 研究方向: 逆向工程, E-mail: 33404006@qq.com;

朱宗孝(1984-), 男, 甘肃兰州人, 副教授、硕士生导师, 研究方向: 精密加工与仿真等, E-mail: zhuzongxiaolut@163.com;

张东(1985-), 男, 甘肃会宁人, 博士, 副教授、硕士生导师, 研究方向: 可再生能源系统等, E-mail: zhdlg@126.com。