新时代下大学数学课程融入思政元素探析

—— 以定积分和矩阵乘法为例

兰州理工大学　杨　琳　王　璇　申莹莹
西北大学　任苗苗

【摘要】为了落实习近平总书记在高校思想政治工作会议上的讲话，本文以大学数学中的高等数学和线性代数中的定积分的概念和线性代数中的矩阵乘法运算为例，探索怎样在这两门课中国融入思政元素，提高学生的获得感，达到全方位育人的效果。

【Abstract】To fall internships in college ideological and political work conference on general secretary's speech, this paper takes the higher mathematics in university mathematics and the concept of definite integral in linear algebra and linear algebra in the matrix multiplication, for example, to explore how to China into ideological elements in the two course, improve the students' feeling, to achieve the effect of all-round education.

【关键词】民族自豪感；“三观”；定积分；逆矩阵

【Keywords】National pride; "Three views"; The definite integral; Inverse matrix

2016 年 12 月 7 日至 8 日，全国高校思想政治工作会议在北京召开。中共中央总书记、国家主席、中央军委主席习近平出席会议并发表重要讲话。他强调，高校思想政治工作关系高校培养什么样的人、如何培养人以及为谁培养人这个根本问题。要坚持把立德树人作为中心环节，把思想政治工作贯穿教育教学全过程，实现全程育人、全方位育人，努力开创我国高等教育事业发展新局面，高等教育发展水平是一个国家发展水平和发展潜力的重要标志。实现中华民族伟大复兴，教育的地位和作用不可忽视。我们对高等教育的需要比以往任何时候都更加迫切，对科学知识和卓越人才的渴求比以往任何时候都更加强烈。党中央做出加快建设世界一流大学和一流学科的战略决策，就是要提高我国高等教育发展水平，增强国家核心竞争力。

兰州理工大学地处甘肃兰州，为全国尤其是西部地区培养了大量的人才。兰州理工大学理学院数学系主要承担着大面积公共数学课的教学工作。从新生刚入校，我们便开设了高等数学课程，在大一第二学期开设了线性代数课程。按照学生的专业，将高等数学分为高等数学 A、高等数学 B、高等数学 C 和高等数学 D，分层次教学。线性代数课程从原来的 40 个课时的理论课，改成了 32 学时的理论课程，后续安排上机实验课程。高等数学和线性代数课程主要是针对于理工科学生开设的公共必修课，依托于这两门课，在后续的专业课学习中才能更好地利用数学方法解决相应学科的实际问题。数学学科主要是教会学生思考的方式，和训练学生思维的能力。高等数学中的分析思想，将对以后处理连续问题非常有用，而线性代数中的矩阵思想将问题离散化处理的方式，又是一种很重要的处理问题的方式。在大学的学习中，这两门课是理工科学生要花力气学的学科。由于数学本身比较枯燥，所以我们积极响应习近平总书记提出的将思想政治工作融入到课程的教学过程中的讲话精神，从 2017 年春季学期开始，就有意识地将一些思政元素融入教学过程中，最终将数学课与实际结合，让学生更加主动地去学习。以下从两个问题出发具体介绍我们的教学方法。

一、定积分的概念

定积分的概念为后续定积分的计算和应用打下基础，它上承导数与不定积分，下启定积分的应用、重积分、曲线积分和曲面积分；定积分的概念是将数学、物理和工程技术等问题高度抽象的结果，能精确求解“非均匀分布总量”这一大类问题，现已被广泛应用于自然科学、社会科学与其他众多领域中。下面将从曲边梯形的面积入手讲解定积分的概念。

1. 曲边梯形面积

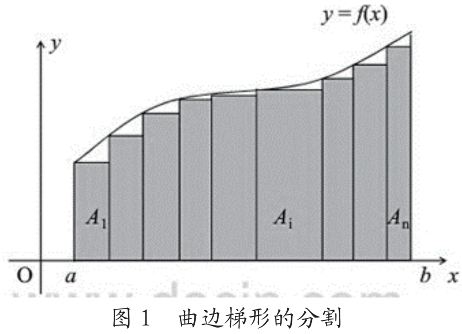

图 1　曲边梯形的分割

在图 1 中，设 $y=f(x)\in C[a,b]$，（即为 $[a,b]$ 上的连续函数），且 $f(x)\geq 0$。称由 $x=a, a=b, y=0$ 与曲线 $y=f(x)$ 所围图形为曲边梯形。要求此曲边梯形的面积，该怎么去做呢？以下分四步进行解决此问题：

（1）分割：因为大的曲边梯形没法求，则可以引入

分割的思想，由于面积是可以分割的，所以我们在$[a,b]$中间插入$n-1$个分点（如图 1）：

$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$。

此时可以将大的曲边梯形最终分割成n个小曲边梯形。因此可以知道曲边梯形面积为$S=S_1+S_2+\cdots+S_n$；

（2）近似：对于小曲边梯形S_i进而将其近似为$S_i\approx f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$；

（3）求和：由于每个小曲边梯形面积的近似，可以得到大曲边梯形的近似如下：$S\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，其中$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$；

（4）取极限：当插入的点无限多，并且分的小曲边梯形最终越来越细的时候引入$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，所以$S=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$。

2. 变速直线运动的位移

设物体沿直线运动，其速度$v=v(t)$是时间区间$[T_1,T_2]$上的连续函数，且$v(x)\ge 0$。计算$[T_1,T_2]$时间内物体移动的位移。以下仍然分四步进行解决：

（1）分割：在区间$[T_1,T_2]$中间插入$n-1$个分点：

$T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T_2$。

因此总位移$s=s_1+s_2+\cdots+s_n$；

（2）近似：对于小的位移s_i将其近似$s_i\approx v(\tau_i)(t_i-t_{i-1})$；

（3）求和：由每个小位移的近似可以得到整体位移的近似如下：

$s\approx\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)(t_i-t_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$，其中$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$；

（4）取极限：和处理面积一样，引入$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\}$，则$s=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$。

这种将大问题化成小问题的方法，是在实际生活之中经常用到的方法，比如：吃饭要一口一口吃，路要一步一步走，知识要一点一点的学。当$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$时，则每个小曲边梯形最终都会趋于一条直线。众所周知，直线的面积是零，但经过无穷个直线的面积之和所形成的曲边梯形面积，是一个确定的数字，最终雨滴汇聚成海洋。在此就可以将思政元素：量变与质变的关系进行引入。当量达到一定程度时，就会发生质的飞跃变化。对于学生来讲，每天都有进步，最终一周、一个月、一学期、一年、四年……这样一直下去，我们最终就会离我们的梦想越来越近，反之，就越来越远。让学生在学习定积分的概念的时候要脚踏实地，一步一个脚印走好每一步路。树立正确的“三观”。

3. 定积分的定义

定义 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有界，首先在$[a,b]$中间插入$n-1$个分点

$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，

则可将区间$[a,b]$分成n个小区间

$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$，

并且各小区间长度为

$\Delta x_1=x_1-x_0,\Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$，

于是在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$中任意取一个点ξ_i，做积$f(\xi_i)\Delta x_i$，再做和$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，记$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$。若不管对$[a,b]$怎样分法，也不管$\xi_i$如何取法，只要当$\lambda\to 0$时，和式的极限都存在，称此极限为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分，记为$\int_a^b f(x)dx$。

讲完此定义后，要让学生在将定义回归到两个引理上，即：

$S=\int_a^b f(x)dx,s=\int_{T_1}^{T_2}v(t)dt$。

此处可以加入思政元素：透过现象看本质，抛开数学和物理的背景，要将其实质抽象成一个数学模型考虑问题，这样就可以解决一类问题。

二、矩阵乘法

矩阵在线性代数中是非常重要的研究对象，也是很重要的数学工具，在矩阵上加入类似于数上的运算，是很容易让人想到的一个问题，而矩阵乘法是矩阵运算中最常见的运算之一，它能够简单地描述许多实际问题中的各种复杂关系，并在自然科学、工程技术、社会科学、经济学等各个领域都有着非常广泛的应用。但是由于矩阵乘法与学生学过的数字或者函数乘法之间的差别很大，使大一学生难以接受，很多学生只能机械地记忆矩阵的乘法法则。为了使学生对矩阵乘法有一个具体和形象的认识，在教学中结合交通运输矩阵的实例，进而帮助学生掌握矩阵乘法。

1. 交通问题设有P,Q,R三省，它们的城市$P_1,P_2,P_3,Q_1,Q_2,Q_3,R_1,R_2$之间的联结情况（不考虑省内交通）如图 2 所示，假设从P省到R省必须经过Q省，求P省各城市到R省各城市的交通线路的条数。这是一个交通网络问题，从图 2 可以观察得到：P_1到R_1,R_2的交通线路分别为 1 条、1 条；P_2到R_1,R_2的交通线路分别为 1 条、0 条；P_3到R_1,R_2的交通线路分别为 1 条、0 条。利用矩阵来描述这个问题，设P省到Q省城市之间的交通联结可用有向图的邻接矩阵$P=(p_{ij})$表示，矩阵中的元素按如下规则定义：

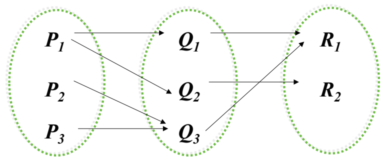

图 2　三省交通图

$$p_{ij}=\begin{cases}0 & P_i\text{到}P_j\text{有交通线路}\\ 1 & P_i\text{到}P_j\text{无交通线路}\end{cases}$$

则可知$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，类似可定义$Q$省到$R$省城

市之间的邻接矩阵 $Q=(q_{ij})=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$P$ 省到 R 省城市之间的邻接矩阵 $R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\1&0\end{pmatrix}$。观察发现这三个矩阵满足 R 中的元素 r_{ij} 等于 P 的第 i 行元素乘以 Q 的第 j 列元素再求和。则可以用以下乘法运算去记：

$$PQ=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\1&0\end{pmatrix}=R.$$

此处可以加入 2020 年中国铁路地图，从图中观察中国高铁的发展，表明现在已经是世界第一名，建立学生强烈民族自豪感，让学生为身为一名中国人而自豪，致力于为社会主义事业奋斗终生，激励学生为祖国的发展贡献自己的力量。最终给出举矩阵乘法定义。

2. 矩阵乘法定义

将上述实例抽象矩阵乘法的定义.

定义 设矩阵 $A=(a_{ik})_{m\times t},B=(b_{kj})_{t\times n}$， 定义 $C=(c_{ij})_{m\times n}$ 如下：

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{t}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{it}b_{tj},\ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

称 C 为矩阵 A 与 B 的乘积，记做 $C=AB$.

3. 矩阵乘法的计算

例 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$，求 AB，BA .

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times0+0\times1&1\times0+0\times1\\1\times0+0\times1&1\times0+0\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\times0+0\times1&0\times0+0\times0\\1\times1+1\times1&1\times0+1\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

注：（1）矩阵乘法不满足交换律，即在一般情况下 $AB\neq BA$.

（2）只有当左边矩阵的列数与右边矩阵的行数相同时，两个矩阵才能相乘。如：

$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$，而 $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 不存在..

（3）由 AB=0 不能推出 A=0 或 B=0，换言之，非零矩阵相乘的结果也可能是零矩阵，例 1 的结果说明了这一点。

（4）矩阵乘法不满足消去律，即由 $AB=AC,A\neq O$，不能推出 $B=C$.

如：$A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$。

在矩阵乘法的定义中，由定义的要求和注 2 可以发现，前一个矩阵的列数后一个矩阵的行数，否则无法相乘;由例子可知，两个矩阵在可以相乘的情况下，乘积也不一定相等；再由例子可知两个非零矩阵相乘可能也是零矩阵；根据注 4 发现在数字中满足的消去律在矩阵乘法下也失效了。这些都是和数字相乘是不一样的，所以此处可以加入思政元素：不要用旧眼光看问题，新的事物要用发展的眼光看问题，不能固步自封；并且由矩阵乘法不具有交换律和消去律引出，任何事情都是有规范的，我们要规范自己的行为，不做法律和道德规范以外的事情，建立正确的人生观，世界观和价值观（“三观”），以辩证的眼光看问题，不能固守思维，要用辩证的思维审视新事物。

以上是我们从大学生基础课程高等数学和线性代数课程中节选了两部分进行讨论，讲述了在这两个节段中如何融入思政元素。在整个课程的讲授中，尽量要让学生不仅学习知识，还要让学生在成才的路上走得更好，讲授做人的道理，激发学生的爱国主义情怀，让学生成为各方面全面发展的人才，能够为我们国家的发展贡献自己最大的努力。尤其是现在国际上新冠疫情非常严重，在我国人口基数如此之大的情况下，疫情却控制得如此之好，这是由于我们团结在党的周围，时刻听党指挥，严防死守，做好自己的本职工作。学生认真学习，这就是一种对社会的贡献。我们要从各个角度发扬这种爱国精神，以后我们会在课程的教学中继续创新，将以多样的形式讲授课程，让学生爱学数学课，为学生的成才添砖加瓦，为国家建设输出更多的人才。

【参考文献】

[1] 张烁．把思想政治工作贯穿教育教学全过程 开创我国高等教育事业发展新局面 [N]. 人民日报，2016-12-09(01).

[2] 吴晶，胡浩．习近平在全国高校思想政治工作会议上强调 把思想政治工作贯穿教育教学全过程 开创我国高等教育事业发展新局面 [J]. 中国高等教育，2016(24):5-7.

[3] 林伟初，郭安学．高等数学（经管类）[M]. 北京：北京大学出版社，2015:164-165.

[4] 同济大学数学教研室．高等数学 [M]. 北京：高等教育出版社，1996:274-277.

[5] 金晶亮，吕效国，李敏，王金华，薛莲．高等数学课程中定积分概念的教学设计 [J]. 高等函授学报（自然科学版），2011,24(05):14-17.

[6] 田振际，黄灿云．线性代数 [M]. 北京：科学出版社，2008:29-30.

[7] 魏莹．矩阵乘法在交通与通讯网络中的应用 [J]. 广东交通职业技术学院学报，2013,12(1):42-44.

【基金项目】甘肃省教育科学“十三五”规划 2019 年度一般规划课题 (GS[2019]GHB2194)；兰州理工大学高教研究项目 (GJ2020C-18，GJ2020B-14，GJ2020B-37)。

【作者简介】杨琳（1986—），女，汉族，陕西咸阳人，讲师，博士，主要研究方向：代数学