文章编号：1004-2474(2011)05-0753-04

压电自感知柔性悬臂梁振动控制系统研究

缑新科[1,2]，李大鹏[1]

（1. 兰州理工大学 电气工程与信息工程学院，甘肃 兰州 730050；2. 甘肃省工业过程先进控制重点实验室，甘肃 兰州 730050）

摘 要：将压电悬臂梁系统离散化的状态空间方程作为预测模型，设计了预测函数控制器。采用电桥电路法分离出压电自感知执行器的感知信号，经过预测函数控制器处理后输出的控制信号作用于自感知执行器，产生相应的执行力来抑制悬臂梁的振动，从而达到振动控制的目的。仿真结果表明，所设计的振动控制系统对柔性悬臂梁振动抑制是非常有效的。

关键词：压电自感知执行器；电桥电路法；预测函数控制；柔性悬臂梁；振动控制

中图分类号：TP13；O328 文献标识码：A

Study on Flexible Cantilever Beam Vibration Control System Based on Piezoelectric Self-sensing Actuator

GOU Xinke[1,2], LI Dapeng[1]

(1. College of Electrical and Information Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China;
2. Key Lab. of Gansu Advanced Control for Industrial Processes, Lanzhou 730050, China)

Abstract: Regarding the discrete state-space equation as prediction model, the paper designs the predictive functional controller. The sense signal of piezoelectric self-sensing actuator is separated by the bridge circuit. After processing the sense signal with the predictive functional controller, the control signal is outputted to control piezoelectric self-sensing actuator. The stress is produced from the self-sensing actuator to control the flexible cantilever beam vibration. The simulation results show the designed system is very efficient for vibration suppression.

Key words: piezoelectric self-sensing actuator; bridge circuit; predictive functional control; flexible cantilever beam; vibration control

0 引言

由于柔性悬臂梁结构自身具有扰度高、阻尼低的特性，当受到外扰时，会产生激烈且持续的振动，影响了结构的性能，因此对柔性结构的振动控制是必要的。在柔性结构振动控制系统中，实现主动振动控制需要有传感、控制、执行单元作为结构的外属部分，这样势必造成系统整体结构的庞大，附加质量大影响了结构的本身特性；同时，传统方法使用独立的传感器、执行器很难做到同位配置，对设计和工艺提出了更高要求[1-2]。在众多的智能材料中，压电材料以其特有的正、逆压电效应在结构振动控制中得到了广泛应用。压电自感知执行器作为执行器的同时又可作为传感器，具有结构体积小，可实现同位配置等优点[3-4]。本文将一片压电片作为自感知执行器，采用电桥电路法，设计了柔性悬臂梁振动控制系统。

1 压电元件的物理模型

Dosch 等提出的压电元件等效模型如图 1 所示，其中 V_p 为压电片受到应力时产生的感应电压，C_p 为等效电容。采用电桥电路的信号分离方法[5]，如图 2 所示，将压电自感知执行器做一个桥臂，C_r 为参考电容，C_1、C_2 为串联容抗，V_c 为控制电压。电桥输出电压为

$$V_s=\left(\frac{C_p}{C_1+C_p}-\frac{C_r}{C_2+C_r}\right)V_c-\frac{C_p}{C_1+C_p}V_p \tag{1}$$

电桥平衡条件为 $C_1C_r=C_2C_p$，此时 V_s 正比于 V_p，即

$$V_s=-[C_p/(C_1+C_p)]V_p \tag{2}$$

收稿日期：2010-09-28
作者简介：缑新科(1966-)，男，甘肃天水人，教授，硕士生导师，硕士，主要从事智能结构及其动力学系统控制的研究。

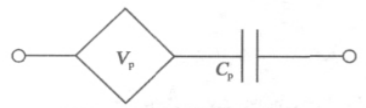

图 1 压电元件等效模型

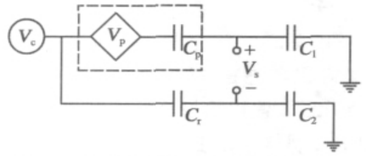

图 2 压电自感知执行器电桥电路

2 压电悬臂梁系统建模

压电悬臂梁模型如图 3 所示，梁的弹性模量为 E，抗弯截面模量为 I，密度为 ρ，长度为 L，宽度为 b_b，厚度为 t_b，横截面积为 S，压电片的弹性模量为 E_p，厚度为 t_p，长度为 l_p，压电应力常数为 e_{31}，压电常数为 d_{31}，压电传感器的等效电容为 C_p。

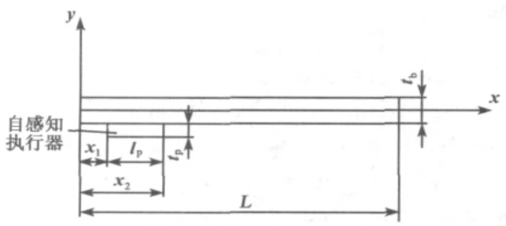

图 3 压电悬臂梁模型

根据振动理论，悬臂梁的横向振动偏微分方程为

$$EI\frac{\partial^4\omega(x,t)}{\partial x^4}+\rho S\frac{\partial^2\omega(x,t)}{\partial t^2}=FV_c[h(x-x_2)-h(x-x_1)] \tag{3}$$

式中：$F=\frac{1}{2}b_b d_{31}E_p(t_b+t_p)$；$\omega(x,t)$ 为悬臂梁的扰度；$h(x)$ 为 Heaviside 阶跃函数；V_c 为控制输入电压。

利用正压电效应，压电片上由于形变引起的电压为

$$V_p=\frac{b_b e_{31}t_p}{2C_p}[\omega'(x_2)-\omega'(x_1)] \tag{4}$$

由分离原理可知，梁的扰度为

$$\omega(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\Phi_i(x)\eta_i(t) \tag{5}$$

式中：$\eta_i(t)$ 为模态坐标；$\Phi_i(x)$ 为关于质量归一化的正交模态函数。

模态坐标下梁的振动平衡方程可写成

$$\ddot{\eta}_i(t)+2\xi_i\omega_i\dot{\eta}_i(t)+\omega_i^2\eta_i(t)=B_iV_c(t) \tag{6}$$

其中

$$B_i=\frac{1}{2}b_p d_{31}E_p(t_b+t_p)[\Phi'_i(x_2)-\Phi'_i(x_1)] \tag{7}$$

式中：ξ_i 为第 i 阶模态阻尼比；ω_i 为第 i 阶模态固有频率；$\Phi'_i(x)$ 为振型函数对 x 的 1 阶导数。

将式(5)代入式(4)有

$$V_p=\sum_{i=1}^{\infty}b_b e_{31}\frac{t_p}{2}[\Phi'_i(x_2)-\Phi'_i(x_1)]\eta_i(t) \tag{8}$$

令

$$\hat{C}_i=\frac{b_b e_{31}t_p}{2}[\Phi'_i(x_2)-\Phi'_i(x_1)] \tag{9}$$

则

$$V_p=\sum_{i=1}^{\infty}\hat{C}_i\eta_i(t) \tag{10}$$

引入状态向量

$$\boldsymbol{x}(t)=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\dot{\eta}_1,\dot{\eta}_2,\cdots,\dot{\eta}_n]^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

压电悬臂梁系统状态空间方程为

$$\begin{cases}\dot{x}=\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{B}V_c\\ y(t)=V_p=\boldsymbol{C}x\end{cases} \tag{12}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0_{n\times n} & I_{n\times n}\\ -\Lambda & -2\xi_i\omega_i\end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\Lambda=\mathrm{diag}(\omega_1^2\cdots\omega_n^2) \tag{14}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0_{n\times 1}\\ B_i\end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{C}=[\hat{C}_i,0_{1\times n}] \tag{16}$$

3 基于状态空间方程的预测函数控制

3.1 预测函数控制的基本原理

预测函数控制(PFC)是 20 世纪 80 年代由 Richalet[6] 提出的，它在保持模型预测控制优点的同时，通过引入基函数的概念增强了输入控制量的规律性，提高了快速性和准确性，可有效地减少算法的在线计算量。图 4 为 PFC 基本原理的系统框图。

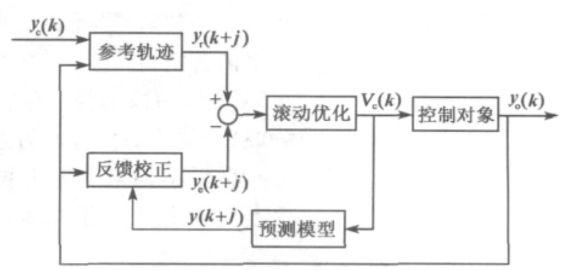

图 4 PFC 基本原理方框图

图中控制量采用如下结构：

$$V_c(k+j)=\sum_{n=1}^{N}\mu_n f_n(j)\quad (j=0,1,\cdots,P-1)\tag{17}$$

式中：$f_n(j)$为基函数在第 j 时刻的采样值，基函数可以是阶跃、斜坡和指数等基本函数；k 为当前采样时刻；$V_c(k+j)$为从 k 时刻起第 $k+j$ 时刻的预测控制量；N 为基函数个数；P 为预测的时域长度；μ_n 为加权系数。

参考轨迹形式为

$$y_r(k+j)=y_c(k+j)-\alpha^j[y_c(k)-y_o(k)]\tag{18}$$

式中：$y_c(k)$为跟踪输出设定值；$y_o(k)$为系统实际输出；$\alpha=\exp\left(-\frac{T_s}{T_r}\right)$，$T_s$ 为采样时间，T_r 为 95%参考轨迹响应时间。

一般取预测误差为

$$e(k+j)=y_o(k)-y(k)\tag{19}$$

式中 $y_e(k+j)=y(k+j)+e(k+j)$为修正后的预测输出。

滚动优化是依据某一性能指标的最优化来求解控制量的。PFC 滚动优化的目标就是求解一组系数 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_N$ 使整个优化时域内的预测输出尽可能接近参考轨迹。

3.2　预测函数控制及其实现步骤

采用离散化的状态空间方程作为预测模型，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k})=\boldsymbol{A}x(k-1)+\boldsymbol{B}V_c(k-1)\\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{k})=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k})\end{cases}\tag{20}$$

式中：$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k})$、$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{k})$分别为系统状态矢量和输出矢量；$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 分别为系统矩阵、输入矩阵、输出矩阵。

$k+j$ 时刻模型的预测输出为

$$y(k+j)=\boldsymbol{C}A^jx(k)+\boldsymbol{C}A^{j-1}\boldsymbol{B}V_c(k)+\cdots+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}V_c(k+j-2)+\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}V_c(k+j-1)\tag{21}$$

将控制量 $V_c(k+j)=\sum_{n=1}^{N}\mu_n f_n(j)$代入式(21)得

$$y(k+j)=\boldsymbol{C}A^jx(k)+\boldsymbol{\Theta}^T\boldsymbol{G}(j)\tag{22}$$

其中

$$\boldsymbol{\Theta}=[\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_N]^T\tag{23}$$

$$\boldsymbol{G}(j)=[g_1(j),g_2(j),\cdots,g_N(j)]^T\tag{24}$$

$$g_n(j)=\boldsymbol{C}A^{j-1}\boldsymbol{B}f_n(0)+\boldsymbol{C}A^{j-2}\boldsymbol{B}f_n(1)+\cdots+\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}f_n(j-1)\tag{25}$$

定义二次型性能指标为

$$\min J(k)=\min\sum_{i=1}^{S}[y_r(k+h_j)-y_m(k+h_j)-e(k+h_j)]^2\tag{26}$$

式中：S 为优化时域内拟合点数量；h_j 为第 j 个拟合点上的值。

令$\frac{\partial J(k)}{\partial\boldsymbol{\Theta}}=0$，对 $\boldsymbol{J}(k)$最优化求解并计算出当前控制量 $V_c(k)$为

$$V_c(k)=\boldsymbol{k}_c[y_c(k)-y_o(k)]+\boldsymbol{k}_m x(k)\tag{27}$$

其中

$$\boldsymbol{k}_c=\boldsymbol{f}_n^T(0)\boldsymbol{\Pi}\begin{bmatrix}1-\alpha^{h_1}\\ \vdots\\ 1-\alpha^{h_S}\end{bmatrix}\tag{28}$$

$$\boldsymbol{k}_m=-\boldsymbol{f}_n^T(0)\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}A^{h_1}-I\\ \vdots\\ A^{h_S}-I\end{bmatrix}\tag{29}$$

$$\boldsymbol{\Pi}=(\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^T)\boldsymbol{G}^{-1}\tag{30}$$

$$\boldsymbol{f}_n^T=[f_1(0),f_2(0),\cdots,f_N(0)]\tag{31}$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 为与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 同阶的单位矩阵。

预测函数控制算法的实现步骤：

1）确定系统的预测模型矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$，给定基函数的选择，给定 T_s、T_r 等相关参数，离线计算出 $\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{\Pi}$、α、$\boldsymbol{k}_c$、$\boldsymbol{k}_m$。

2）给定系统初始状态 $x(0)$和控制量的初始值 $V_c(0)$。

3）读入系统 k 时刻实际输出值 $y_o(k)$及跟踪设定值 $y_c(k)$。

4）计算 $\boldsymbol{x}(k)$。

5）计算 k 时刻的控制量 $V_c(k)$。

6）令 $k=k+1$，返回第 3)步。

4　控制系统设计及仿真分析

系统闭环控制器设计如图 5 所示。

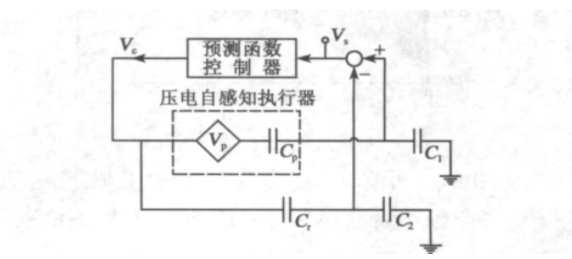

图 5　闭环控制系统原理图

当梁受到扰动时，控制系统的工作过程：压电片作为传感器时，电桥电路输出与振动速度成比例的

感应电压 V_s，经预测函数控制器处理后，输出控制电压 V_c 反馈到压电片的电极上；作为执行器时，当受到控制电压 V_c 的控制，压电片会产生相应的执行力来抑制梁的扰动变形，从而达到振动控制的目的。

选用的梁和压电片的具体参数如表 1 所示。

表 1 梁和压电片的物理参数

参 数	梁	压电片
长度/mm	1 800	30
宽度/mm	10	10
厚度/mm	3	1
密度/(kg/m³)	2.7×10^3	7.51×10^3
弹性模量/GPa	70	63
d_{31}/(pC/N)		210
电容/nF		10.5

忽略压电片对悬臂梁的影响，采用模态截断法取前 2 阶模态，经计算，1、2 阶模态固有频率为 $\omega_1=4.793\ 6$ rad/s，$\omega_2=30.0431$ rad/s 。假设结构阻尼为 $\zeta_1=\zeta_2=0.65$，对悬臂梁末端施加初始位移为 5 cm的扰动，对悬臂梁的前两阶模态进行控制，启动预测函数控制器，使用 MATLAB 进行仿真，结果如图 6、7 所示。

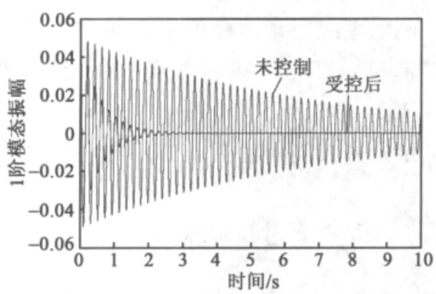

图 6 系统 1 阶模态振动效果图

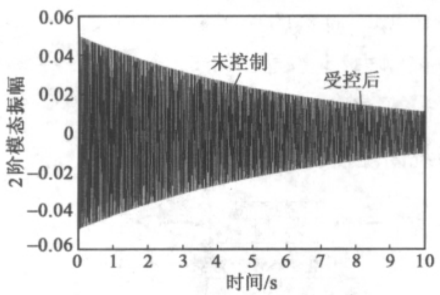

图 7 系统 2 阶模态振动效果图

从图 6、7 可看出，在自身的结构阻尼下，系统 1、2 阶模态振动衰减很慢。采用本文设计的控制器对梁进行控制后，由于控制器输出控制电压使压电片产生抑制力，悬臂梁的振动衰减明显加快，经几次震荡后很快就到达了稳态。

5 结束语

将压电片作为自感知执行器，设计了柔性悬臂梁振动控制系统。系统中采用了电桥电路法分离出感知信号。将离散化的状态空间方程作为预测模型，设计了预测函数控制器。仿真结果表明，所设计的控制系统能很好地抑制柔性悬臂梁振动。

参考文献：

[1] 费红姿，郑钢铁，黄文虎. 柔性振动预测控制的仿真研究[J]. 振动工程学报，2003，16(3)：321-325.
FEI Hongzi，ZHENG Gangtie，HUANG Wenhu. Simulation study on predictive vibration control of flexible structure[J]. Journal of Vibration Engineering，2003，16(3)：321-325.

[2] 孙煜博，秦建斌. 压电智能悬臂梁最优控制建模与仿真[J]. 机械工程与自动化，2008，2：59-61.
SUN Yubo，QIN Jianbin. Modeling and simulation of piezoelectric smart cantilever beam based on optimal control system[J]. Mechanical Engineering & Automation，2008，2：59-61.

[3] CHAN K W，LIAO W H. Self-sensing actuators with passive damping for adaptive vibration control of hard disk drives[J]. Microsyst Technol，2009，15(3)：355-366.

[4] 董维杰，孙宝元，崔玉国，等. 基于压电自感知执行器悬臂梁振动控制[J]. 大连理工大学学报，2001，41(1)：77-80.
DONG Weijie，SUN Baoyuan，CUI Yuguo，et al. Vibration control of cantilever beam using self-sensing actuator[J]. Journal of Dalian University of Technology，2001，41(1)：77-80.

[5] DOSCH J J，INMAN D J，GARCIA E. Self-sensing piezoelectric actuator for collocated control[J]. J Intell Mater Syst Struct，1992，3(1)：166-185.

[6] RICHALET J，DOSS S A A，ARBER C，et al. Predictive functional control：Applications to fast and accurate robots[A]. In：Isermann R ed. Automatic Control 10th Triennial World Congress of IFAC[C]//Oxford：Pergamon Press，1988：251-258.