哈尔滨工程大学学报
Journal of Harbin Engineering University
ISSN 1006-7043,CN 23-1390/U

《哈尔滨工程大学学报》网络首发论文

哈 尔 滨 工 程 大 学 学 报
Journal of Harbin Engineering University

Indu-Bala 乘积图的广义距离谱

卢鹏丽，刘文智

（兰州理工大学 计算机与通信学院，甘肃 兰州 730050）

摘　要：为了完善组合图的距离谱理论，减少图谱的计算复杂度，依据矩阵论和图论相关知识，首先计算了 Indu-Bala 乘积图 $G_1\nabla G_2$ 的广义距离谱，进而得到其距离拉普拉斯谱和距离无符号拉普拉斯谱；然后由所得谱证明了一类距离（无符号）拉普拉斯整谱图 $\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}}$；作为应用，得到了一类特殊图 $\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}}$ 的距离（无符号）拉普拉斯谱能量。

关键词：图论；距离（无符号）拉普拉斯矩阵；广义距离矩阵；组合图；广义距离谱；距离（无符号）拉普拉斯谱；整谱图；谱能量

Doi：10. 11990/ jheu. 201906057

中图分类号：0157. 5　　　**文献标识码**：A

The generalized distance spectrum of Indu-Bala product of graphs

LU Pengli，LIU Wenzhi

(School of Computer and Communication, Lanzhou University of Technology, Lanzhou, 730050, China)

Abstract：In order to improve the distance spectrum theory of composite graphs and reduce the computational complexity of spectral graph theory, based on matrix theory and graph theory related knowledge, the generalized distance spectrum of $G_1\nabla G_2$ is calculated, and then the distance Laplacian spectrum and the distance signless Laplacian spectrum are obtained. We also prove that the class of graphs $\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}}$ has integral distance (signless) Laplacian spectrum. As an application, We use this result to obtain the distance (signless) Laplacian energy of graph $\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}}$.

Keywords：graph theory; distance (signless) Laplacian matrix; generalized distance matrix; composite graphs; generalized distance spectrum; distance (signless) Laplacian spectrum; integral spectrum graphs; spectrum energy

距离谱理论作为图论的一个重要研究方向，主要是通过图的各类矩阵（距离矩阵、距离拉普拉斯矩阵等）、特征根及其特征向量来研究图的拓扑结构和代数性质，广泛应用于计算机、复杂系统、化学、物理等学科中。关于距离谱和距离（无符号）拉普拉斯谱的研究现状如下：学者们已经计算得到了圈图[2]、路图[4]和完全二部图[3]等简单图的距离谱；文献[5,6]中，D. Stevanovic 和 G. Indulal 得到了正则图的联图的距离谱，距离正则图和完全图的簇图的距离谱；文献[7]中，S. Barik 和 G. Sahoo 得到了距离正则图和正则图的冠图的距离谱和距离（无符号）拉普拉斯谱；其他研究成果见文献[8-11]。在此基础上，计算了一类组合图的广义距离谱。通过简单地参数赋值，就可以得到距离（无符号）拉普拉斯谱，大大减少了距离矩阵相关谱的计算量。

1　基本概念和引理

本文只讨论简单连通图。图 $G=(V(G),E(G))$，其中顶点集和边集分别为 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E(G)=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$。图 G 中任意两个顶点 u,v 之间的距离记为 $d_G(u,v)$，它表示顶点 u 和顶点 v 之间最短路径的长度。顶点 u 的传递 $Tr(u)$ 定义为顶点 u 到 G 中其他顶点距离的和，记为 $Tr(u)=\sum_{v\in V(G)}d_G(u,v)$，平均传递 $t(G)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Tr(v_i)$。图 G 的距离矩阵记为 $\boldsymbol{D}(G)=(d_{uv})_{n\times n}$，是一个 $n\times n$ 维矩阵，其中

基金项目：国家自然科学基金项目（11361033）.
作者简介：卢鹏丽，女，教授，博士生导师；
刘文智，男，硕士研究生.
通信作者：卢鹏丽，E-mail: lupengli88@163.com.

$d_{uv}=d_G(u,v)$，矩阵 $\boldsymbol{D}(G)$ 的特征值记为 $\lambda_1^D(G)\ge\lambda_2^D(G)\ge\cdots\ge\lambda_n^D(G)$，距离矩阵 $\boldsymbol{D}(G)$ 的特征值及其对应重数所构成的集合为图 G 的距离谱，记为 $\boldsymbol{D}$ – 谱。图 G 的距离谱能量[14]定义为

$$DE(G)=\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i^D(G)\right|$$

2013 年，M. Aouchiche 和 P. Hansen[1]受拉普拉斯矩阵和无符号拉普拉斯矩阵的启发，提出了图的距离拉普拉斯矩阵和距离无符号拉普拉斯矩阵的概念，并研究它们的谱。图 G 的传递矩阵记为 $\boldsymbol{Tr}(G)$，是对角线元素为 $Tr(v_i)$ 的 $n\times n$ 维对角矩阵。图 G 的距离拉普拉斯矩阵和距离无符号拉普拉斯矩阵分别记为 $\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{Tr}(G)-\boldsymbol{D}(G)$ 和 $\boldsymbol{Q}(G)=\boldsymbol{Tr}(G)+\boldsymbol{D}(G)$，相应的特征值分别为 $\lambda_1^L(G)\ge\lambda_2^L(G)\ge\cdots\ge\lambda_n^L(G)=0$，$\lambda_1^Q(G)\ge\lambda_2^Q(G)\ge\cdots\ge\lambda_n^Q(G)$，相应的特征值及其重数所构成的集合称为图 G 的距离拉普拉斯谱和距离无符号拉普拉斯谱，记为 $\boldsymbol{L}$ – 谱和 $\boldsymbol{Q}$ – 谱。

2019 年，Guixian Tian[16]等人研究了距离矩阵和传递矩阵的线性组合，提出了广义距离矩阵，记作 $\boldsymbol{D}_\alpha(G)=\alpha\boldsymbol{Tr}(G)+(1-\alpha)\boldsymbol{D}(G)$，$0\le\alpha\le1$。由此可以通过一个参数 α 将三个矩阵联系在一起，$\boldsymbol{D}_0(G)=\boldsymbol{D}(G)$，$\boldsymbol{D}_{\frac{1}{2}}(G)=\frac{1}{2}\boldsymbol{Q}(G)$，$\boldsymbol{D}_1(G)=\boldsymbol{Tr}(G)$，$\boldsymbol{D}_\alpha(G)-\boldsymbol{D}_\beta(G)=(\alpha-\beta)\boldsymbol{L}(G)$。广义距离矩阵的特征值记作 $\lambda_1(D_\alpha)\ge\lambda_2(D_\alpha)\ge\cdots\ge\lambda_n(D_\alpha)$，特征值及其重数的集合我们称作广义距离谱。

我们的工作是受到 Ligong Wang[12] 和 G. Indulal[13]论文的启发。文献[12]中，图 $K_{n,n+1}\equiv K_{n+1,n}$ 是将 $K_{n,n+1}$ 复制 2 次，然后将两个复制图中的 $n+1$ 个对应顶点相连接，其中 $K_{n,n+1}$ 是完全二部图，作者证明了 $K_{n,n+1}\equiv K_{n+1,n}$ 是邻接整谱图。文献[13]中，作者将图 $K_{n,n+1}\equiv K_{n+1,n}$ 一般化到图 $G_1\nabla G_2$，是将 G_1 和 G_2 的联图复制 2 次，然后将两个复制图中 G_2 的对应顶点相连接所得到的图，计算了其距离谱。明显地，图 $K_{n,n+1}\equiv K_{n+1,n}$ 是图 $G_1\nabla G_2$ 的一种特殊图 $\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}}$，我们在此基础上计算了 $G_1\nabla G_2$ 的广义距离谱，进而求得距离（无符号）拉普拉斯谱。

引理 1[15] 设图 G 的距离拉普拉斯谱为 $\{\lambda_1^L(G)\ge\lambda_2^L(G)\ge\cdots\ge\lambda_n^L(G)=0\}$，平均传递为 $t(G)$，则图 G 的距离拉普拉斯谱能量定义为

$$DLE(G)=\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i^L(G)-t(G)\right|$$

引理 2[15] 设图 G 的距离无符号拉普拉斯谱为 $\{\lambda_1^Q(G)\ge\lambda_2^Q(G)\ge\cdots\ge\lambda_n^Q(G)\}$，平均传递为 $t(G)$，则图 G 的距离无符号拉普拉斯谱能量定义为

$$DSLE(G)=\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i^Q(G)-t(G)\right|$$

2　图 $G_1\nabla G_2$ 的广义距离谱

定理 1 设图 G_i 是有 n_i 个顶点的 r_i – 正则图，其邻接矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 对应的邻接谱为 $\{r_i,\lambda_{i_2},\lambda_{i_3},\cdots,\lambda_{i_{n_i}}\}$，$i=1,2$。那么图 $G_1\nabla G_2$ 的广义距离谱为

(1)　$(5n_1+3n_2-r_1+\lambda_{1_j})\alpha-\lambda_{1_j}-2$，$j=2,3,\cdots,n_1$，每一个重数为 2；

(2)　$(3n_1+5n_2-2r_2+2\lambda_{2_j})\alpha-2\lambda_{2_j}-4$，$j=2,3,\cdots,n_2$；

(3)　$(3n_1+5n_2-2r_2-4)\alpha$，重数为 n_2-1；

(4)　$\frac{9\alpha n_1}{2}+\frac{9\alpha n_2}{2}-\frac{n_1}{2}-\frac{n_2}{2}-\frac{r_1}{2}-\alpha r_2-2\alpha-1\pm$

$$\frac{\sqrt{9\alpha^2n_1^2-14\alpha^2n_1n_2+12\alpha^2n_1r_2+24\alpha^2n_1+9\alpha^2n_2^2}}{2}$$
$$\frac{\overline{-12\alpha^2n_2r_2-24\alpha^2n_2+4\alpha^2r_2^2+16\alpha^2r_2+16\alpha^2-}}{2}$$
$$\frac{\overline{6\alpha n_1^2+4\alpha n_1n_2-6\alpha n_1r_1-4\alpha n_1r_2-20\alpha n_1-6\alpha n_2^2}}{2}$$
$$\frac{\overline{+6\alpha n_2r_1+4\alpha n_2r_2+20\alpha n_2-4\alpha r_1r_2-8\alpha r_1-8\alpha r_2}}{2}$$
$$\frac{\overline{-16\alpha+n_1^2+2n_1n_2+2n_1r_1+4n_1+n_2^2-2n_2r_1-4n_2}}{2}$$
$$\frac{\overline{+r_1^2+4r_1+4}}{2};$$

$$\frac{5n_1}{2}+\frac{5n_2}{2}+\frac{3\alpha n_1}{2}+\frac{3\alpha n_2}{2}-\frac{r_1}{2}-r_2-3\pm\frac{\sqrt{9\alpha^2n_1^2}}{2}$$
$$\frac{\overline{+18\alpha^2n_1n_2+9\alpha^2n_2^2-30\alpha n_1^2-12\alpha n_1n_2+6\alpha n_1r_1}}{2}$$
$$\frac{\overline{-12\alpha n_1r_2-12\alpha n_1-30\alpha n_2^2-6\alpha n_2r_1+12\alpha n_2r_2+}}{2}$$
$$\frac{\overline{12\alpha n_2+25n_1^2-14n_1n_2-10n_1r_1+20n_1r_2+20n_1+}}{2}$$
$$\frac{\overline{25n_2^2+10n_2r_1-20n_2r_2-20n_2+r_1^2-4r_1r_2-4r_1+}}{2}$$
$$\frac{\overline{4r_2^2+8r_2+4}}{2}。$$

证明： 对图 $G_1\nabla G_2$ 的顶点进行适当编号，图 $G_1\nabla G_2$ 的距离矩阵可以表示为

$$D(G_1\nabla G_2)=\begin{bmatrix} 2(J-I)-A_1 & J & 2J & 3J \\ J & 2(J-I)-A_2 & 3J-2I-A_2 & 2J \\ 2J & 3J-2I-A_2 & 2(J-I)-A_2 & J \\ 3J & 2J & J & 2(J-I)-A_1 \end{bmatrix}$$

根据距离矩阵，我们得到图 $G_1\nabla G_2$ 中每个顶点的传递 $Tr(u)=5n_1+3n_2-r_1-2$，$u\in V(G_1)$；$Tr(v)=3n_1+5n_2-2r_2-4$，$v\in V(G_2)$。因此，图 $G_1\nabla G_2$ 的广义距离矩阵可以表示为

$$D_\alpha(G_1\nabla G_2)=\begin{bmatrix} N^* & (1-\alpha)J & 2(1-\alpha)J & 3(1-\alpha)J \\ (1-\alpha)J & M^* & (1-\alpha)(3J-2I-A_2) & 2(1-\alpha)J \\ 2(1-\alpha)J & (1-\alpha)(3J-2I-A_2) & M^* & (1-\alpha)J \\ 3(1-\alpha)J & 2(1-\alpha)J & (1-\alpha)J & N^* \end{bmatrix}$$

其中，$M^*=(3n_1+5n_2-2r_2-4)\alpha I+(1-\alpha)(2J-2I-A_2)$，$N^*=(5n_1+3n_2-r_1-2)\alpha I+(1-\alpha)(2J-2I-A_1)$，$J$ 是全1矩阵，I 是单位矩阵。

因为 G_i 是 r_i－正则图，所以 A_i 的特征值 r_i 所对应的特征向量是全1向量 $\mathbf{1}$，其他特征向量都和 $\mathbf{1}$ 正交。设 A_i 的特征值 $\lambda_i\neq r_i$ 所对应的特征向量为 X_i，则 $A_iX_i=\lambda_iX_i$，$\mathbf{1}^TX_i=0$，$i=1,2$。

向量 $\phi_1=[X_1\quad 0\quad 0\quad 0]^T$ 是矩阵 $D_\alpha(G_1\nabla G_2)$ 的特征值 $(5n_1+3n_2-r_1+\lambda_{1_j})\alpha-\lambda_{1_j}-2$，$j=2,3,\cdots,n_1$ 所对应的特征向量。即

$$D_\alpha(G_1\nabla G_2)\phi_1=\begin{bmatrix} N^* & (1-\alpha)J & 2(1-\alpha)J & 3(1-\alpha)J \\ (1-\alpha)J & M^* & (1-\alpha)(3J-2I-A_2) & 2(1-\alpha)J \\ 2(1-\alpha)J & (1-\alpha)(3J-2I-A_2) & M^* & (1-\alpha)J \\ 3(1-\alpha)J & 2(1-\alpha)J & (1-\alpha)J & N^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ((5n_1+3n_2-r_1-2)\alpha I+(1-\alpha)(2J-2I-A_1))X_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=(5n_1+3n_2-r_1+\lambda_{1_j})\alpha-\lambda_{1_j}-2\begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

同样地，向量 $\phi_2=[0\quad 0\quad 0\quad X_1]^T$ 是矩阵 $D_\alpha(G_1\nabla G_2)$ 的特征值 $(5n_1+3n_2-r_1+\lambda_{1_j})\alpha-\lambda_{1_j}-2$，$j=2,3,\cdots,n_1$ 所对应的特征向量。

设向量 $\psi=[0\quad tX_2\quad X_2\quad 0]^T$ 是矩阵 $D_\alpha(G_1\nabla G_2)$ 的特征值 μ 所对应的特征向量，然后根据 $D_\alpha(G_1\nabla G_2)\psi=\mu\psi$ 可得

$$\begin{cases}[(3n_1+5n_2-2r_2+\lambda_2-2)\alpha-2-\lambda_2]t-(1-\alpha)(\lambda_2+2)=\mu t \\ -(1-\alpha)(\lambda_2+2)t+(3n_1+5n_2-2r_2+\lambda_2-2)\alpha-2-\lambda_2=\mu\end{cases}$$

求解上面方程组可得：

$\mu=(3n_1+5n_2-2r_2+2\lambda_{2_j})\alpha-2\lambda_{2_j}-4$，$j=2,3,\cdots,n_2$；

$\mu=(3n_1+5n_2-2r_2-4)\alpha$，重数为 n_2-1。

我们已经得到了 $2(n_1-1)+2(n_2-1)=2(n_1+n_2)-4$ 个特征向量，这些特征向量正交于 $[1\quad 0\quad 0\quad 0]^T$，$[0\quad 1\quad 0\quad 0]^T$，$[0\quad 0\quad 1\quad 0]^T$ 和 $[0\quad 0\quad 0\quad 1]^T$。因此，剩余四个特征向量有如下形式 $\varphi=[\beta\mathbf{1}\quad \gamma\mathbf{1}\quad \delta\mathbf{1}\quad \varepsilon\mathbf{1}]^T$，$(\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)\neq(0,0,0,0)$。

设 σ 是矩阵 $D_\alpha(G_1\nabla G_2)$ 的特征向量 φ 所对应的特征值，根据 $D_\alpha(G_1\nabla G_2)\varphi=\sigma\varphi$ 和 $A_i\mathbf{1}=r_i\mathbf{1}$，$i=1,2$ 可得

$$\begin{cases}B^*\beta+(1-\alpha)n_2\gamma+2(1-\alpha)n_2\delta+3(1-\alpha)n_1\varepsilon=\sigma\beta \\ (1-\alpha)n_1\beta+C^*\gamma+(1-\alpha)(3n_2-r_2-2)\delta+2(1-\alpha)n_1\varepsilon=\sigma\gamma \\ 2(1-\alpha)n_1\beta+(1-\alpha)(3n_2-r_2-2)\gamma+C^*\delta+(1-\alpha)n_1\varepsilon=\sigma\delta \\ 3(1-\alpha)n_1\beta+2(1-\alpha)n_2\gamma+(1-\alpha)n_2\delta+B^*\varepsilon=\sigma\varepsilon\end{cases}$$

其中，$B^*=(3n_1+3n_2)\alpha+2n_1-r_1-2$，$C^*=(3n_1+3n_2-r_2-2)\alpha+2n_2-r_2-2$。

我们假设 $\beta=0$ 带入上面方程组，化简得 $\gamma=\delta=\varepsilon=0$，矛盾。因此，不失一般性，我们假设 $\alpha=1$ 求解上面方程组可得定理中的第(4)部分，证毕。

3 图 $G_1\nabla G_2$ 的距离拉普拉斯谱

定理 2 设图 G_i 是有 n_i 个顶点的 r_i－正则图，其邻接矩阵 A_i 对应的邻接谱为 $\{r_i,\lambda_{i_2},\lambda_{i_3},\cdots,\lambda_{i_{n_i}}\}$，$i=1,2$。那么图 $G_1\nabla G_2$ 的距离拉普拉斯谱为

(1) $5n_1+3n_2-r_1+\lambda_{1_j}$，$j=2,3,\cdots,n_1$，每一个重数为2；

(2) $3n_1+5n_2-2r_2+2\lambda_{2_j}$，$j=2,3,\cdots,n_2$；

(3) $3n_1+5n_2-2r_2-4$，重数为 n_2-1；

(4) $$\frac{9n_1}{2}+\frac{9n_2}{2}-r_2-2\pm\frac{\sqrt{9n_1^2-14n_1n_2+12n_1r_2+24n_1+9n_2^2-12n_2r_2-24n_2+4r_2^2+16r_2+16}}{2};$$

$3(n_1+n_2)$；0。

证明： 已知 $D_\alpha(G)-D_\beta(G)=(\alpha-\beta)L(G)$，取 $\alpha=1$，$\beta=0$ 得 $L(G_1\nabla G_2)=D_1(G_1\nabla G_2)-D_0(G_1\nabla G_2)$，

则由定理 1 可得定理 2，证毕。

推论 1 设图 $\overline{K_n}$ 是 n 个顶点的完全图的补图，图 $\overline{K_{n+1}}$ 是 $n+1$ 个顶点的完全图的补图，则图 $\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}}$ 是距离拉普拉斯整谱图。

证明：在定理 2 中，令 $G_1=\overline{K_n}$，$G_2=\overline{K_{n+1}}$。即：$n_1=n, n_2=n+1$ 和 $r_1=r_2=0$，则 $\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}}$ 的距离拉普拉斯谱为

$$\begin{pmatrix} 10n+3 & 8n+5 & 8n+3 & 8n+2 & 8n+1 & 6n+3 & 0 \\ 1 & n & 2(n-1) & 1 & n & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

显然，$\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}}$ 是距离拉普拉斯整谱图。

推论 2 图 $\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}}$ 的距离拉普拉斯谱能量为

$$DLE(\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}})=32n^2-28n+9-\frac{7}{2n+1}。$$

证明：已知 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^L(G)=\sum_{i=1}^{n}Tr(v_i)=nt(G)$，则 $t(\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}})=\frac{1}{4n+2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^L(\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}})=12-\frac{7}{4n+2}$，当 $n\geq 2$ 时，除了特征值 0 之外，其余特征值 $\lambda_i^L(\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}})>t(\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}})$。最后由引理 1 得到推论 2，得证。

4 图 $G_1\nabla G_2$ 的距离无符号拉普拉斯谱

定理 3 设图 G_i 是有 n_i 个顶点的 r_i- 正则图，其邻接矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 对应的邻接谱为 $\{r_i,\lambda_{i_2},\lambda_{i_3},\cdots,\lambda_{i_{n_i}}\}$，$i=1,2$。那么图 $G_1\nabla G_2$ 的距离无符号拉普拉斯谱为

(1) $5n_1+3n_2-r_1-\lambda_{1_j}-4$，$j=2,3,\cdots,n_1$，每一个重数为 2;

(2) $3n_1+5n_2-2r_2-2\lambda_{2_j}-8$，$j=2,3,\cdots,n_2$；

(3) $3n_1+5n_2-2r_2-4$，重数为 n_2-1；

(4) $$\frac{7n_1}{2}+\frac{7n_2}{2}-r_1-r_2-4\pm\frac{\sqrt{n_1^2+2n_1n_2-4n_1r_1+4n_1r_2+n_2^2+4n_2r_1-4n_2r_2+4r_1^2-8r_1r_2+4r_2^2}}{2};$$

$$\frac{13n_1}{2}+\frac{13n_2}{2}-r_1-2r_2-6\pm\frac{\sqrt{49n_1^2-62n_1n_2-28n_1r_1+56n_1+49n_2^2+28n_2r_1-56n_2r_2-56n_2+4r_1^2-16r_1r_2-16r_1+16r_2^2+32r_2+16}}{2}。$$

证明： 已知 $\boldsymbol{D}_{\frac{1}{2}}(G)=\frac{1}{2}\boldsymbol{Q}(G)$，则 $\boldsymbol{Q}(G_1\nabla G_2)=2\boldsymbol{D}_{\frac{1}{2}}(G_1\nabla G_2)$，由定理 1 可得定理 3，证毕。

推论 3 图 $\overline{K_n}$ 是 n 个顶点的完全图的补图，图 $\overline{K_{n+1}}$ 是 $n+1$ 个顶点的完全图的补图，则图 $\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}}$ 是距离无符号拉普拉斯整谱图。

证明：在定理 3 中，令 $G_1=\overline{K_n}$，$G_2=\overline{K_{n+1}}$。即：$n_1=n, n_2=n+1$ 和 $r_1=r_2=0$，则 $\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}}$ 的距离无符号拉普拉斯谱为

$$\begin{pmatrix} 16n+2 & 10n-1 & 8n+1 & 8n & 8n-1 & 8n-3 & 6n-1 \\ 1 & 1 & n & 1 & 2(n-1) & n & 1 \end{pmatrix}$$

显然，$\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}}$ 是距离无符号拉普拉斯整谱图。

推论 4 图 $\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}}$ 的距离无符号拉普拉斯谱能量为 $DSLE(\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}})=32n^2-44n-1$。

证明： 已知 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^L(G)=\sum_{i=1}^{n}Tr(v_i)=nt(G)$，则 $t(\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}})=\frac{1}{4n+2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^Q(\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}})=16-\frac{29}{4n+2}$，当 $n\geq 3$ 时，特征值 $\lambda_i^L(\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}})>t(\overline{K_n}\nabla\overline{K_{n+1}})$。最后由引理 2 得到推论 4，得证。

5 结束语

1)主要研究了两个正则图经过 Indu-Bala 乘积这一图操作之后所形成的合成图的广义距离谱，揭示了合成图的广义距离谱、距离（无符号）拉普拉斯谱与原图的邻接谱之间的关系，不仅拓宽了组合图广义距离谱的研究范围，而且大大减少了距离（无符号）拉普拉斯谱的计算量;

2）得到了一类特殊的距离（无符号）拉普拉斯整谱图;

3）得到了特殊图的距离（无符号）拉普拉斯谱能量公式。

参考文献:

[1] AOUCHICHE M, HANSEN P, Two Laplacians for the distance matrix of a graph[J], Linear Algebra Appl, 2013, 430: 21-33.

[2] GRAOVAC A, JASHARI G, STRUNJE M, On the distance spectrum of a cycle[J], Apl. Mat, 1985, 30:286-290.

[3] KRIVKA P, TRINAJSTIC N, On the distance polynomial of a graph[J], Apl. Mat, 1983, 28:357-363.

[4] RUZIEH S N, POWERS D L, The distance spectrum of the path Pn and the first distance eigenvector of connected graphs, Linear Multilinear Algebra[J], 1990, 28:75-81.

[5] STEVANOVIC D, INDULAL G, The distance spectrum and energy of the compositions of regular graphs[J], Appl. Math. Lett, 2009, 22:136-1140.

[6] INDULAL G, STEVANOVIC D, The distance spectrum of corona and cluster of two graphs[J]. AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 2015, 12:186-192.

[7] BARIK S, SAHOO G, On the distance spectra of coronas[J], Linear and Multilinear Algebra, 2016, 65:1-12.

[8] INDULAL G, Distance spectrum of graph compositions[J], Ars Mathematica Contemporanea , 2009, 2:93-100.

[9] ALHEVAZ A, BAGHIPUR M, HASHEMI E, On the Distance Signless Laplacian Spectrum of Graphs[J], Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2018.

[10] INDULAL G, GUTMAN D C, The distance spectrum of the subdivision vertex join and subdivision edge join of two regular graphs[J], Discrete Math. Lett, 2019, 1:36-41.

[11] AOUCHICHE M, HANSEN P, On the distance signless Laplacian of a graph. Linear and Multilinear Algebra[J], 2016, 64:1113-1123.

[12] WANG L G, Integral graphs and integral trees[D], 2005.

[13] INDULAL G, BALAKRISHNAN R, Distance spectrum of Indu−Bala product of graphs[J], AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 2016, 13(3):230-234.

[14] INDULAL G, GUTMAN I, VIJAYKUMAR A, On the distance energy of a graph[J], MATCH Commun Math Comput Chem, 2008, 60:461-472.

[15] YANG J, YOU L, GUTMAN I, Bounds on the distance Laplacian energy of graphs[J], Kragujevac J. Math, 2013, 37:245-255.

[16] CUI S C, HE J X, TIAN G X, The generalized distance matrix [J], Linear Algebra and its Applications, 2019, 563:1–23.